

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ رـ اـ خ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱

فرض کنیم رأس سوم $C \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix}$ باشد، در این حالت مساحت مثلث را از رابطه زیر به دست می آوریم:

$$S = \frac{1}{2} |(x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_1 y_3)|$$

$$S = \frac{1}{2} |1 - (6\alpha)| = \frac{1}{2} |1 - 6\alpha| = |2\alpha - 4|$$

$$\begin{cases} 2\alpha - 4 = 6 \rightarrow \alpha = \frac{10}{2} \rightarrow C \begin{vmatrix} 10 \\ 3 \\ 10 \\ 3 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$4 - 2\alpha = 6 \rightarrow \alpha = -\frac{2}{2} \text{ غ ق ق}$$

$$C \begin{vmatrix} 10 \\ 3 \\ 10 \\ 3 \end{vmatrix} \Rightarrow OC = \frac{10}{3} \sqrt{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲

اگر قرینه A نسبت به خط $y = -2x + 3$ ، M باشد، یعنی آن که این خط، عمودمنصف A و M است. پس:

$$y = -2x + 3 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow \text{شیب عمود بر آن} = \frac{1}{2}$$

$$m' = \frac{1}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

پس نقطه M، روی این خط عمودمنصف است. پس، $M \begin{vmatrix} \alpha \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} \end{vmatrix}$. همچنین، نقطه وسط A و M روی خط $y = -2x + 3$ است.

$$H \begin{cases} \frac{x_A + x_M}{2} = \frac{3 + \alpha}{2} \\ \frac{y_A + y_M}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\alpha}{4} + \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\frac{\alpha}{4} + \frac{5}{4} = -(2 + \alpha) + 3 \Rightarrow \frac{\alpha + 5}{4} = -\alpha \Rightarrow \alpha = -1$$

$$d = \frac{5}{5} = 1$$

حال فاصله M را از خط $2y - 4x + 1 = 0$ به دست می آوریم. $M \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$

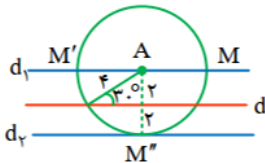
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳

با توجه به آن که $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ، پس فاصله A تا خط d، برابر ۲ واحد است.

دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴ واحد رسم می کنیم. خطوط d_1 و d_2 دایره را در سه نقطه M، M' و M'' قطع می کنند.

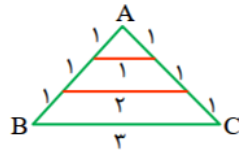
این نقاط روی دایره هستند، پس از A به فاصله ۴ هستند. از طرفی از خط d به فاصله ۲ واحد هستند. پس کلاً ۳ نقطه یافت می شود که در شرایط مساله صدق می کنند.



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

روش اول:

برای راحتی، فرض می‌کنیم مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ باشد.



$$S = \frac{1+3}{2} \times \frac{h}{2} = \frac{h}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3h = \frac{3h}{2}$$

پس مساحت قسمت سایه خورده $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث $\triangle ABC$ است.

روش دوم:

ابتدا مثلث را متساوی‌الاضلاع فرض می‌کنیم و داریم:

مثلث‌های کوچک هم‌مساحت هستند. پس:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{5+4+1} = \frac{1}{10}$$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا فاصله نقطه $A(2, -1)$ را از خط $y - 2x + 1 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$d_1 = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-1 - 4 + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

حالا وارون تابع خطی $y = 2x - 1$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$y = 2x - 1 \Rightarrow 2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$d_2 = \frac{|-2 - 2 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

حالا باید فاصله نقطه $A(2, -1)$ را از خط $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ یا $2y - x - 1 = 0$ تعیین کنیم. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{5}{\sqrt{5}}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

در آخر خواسته مسئله برابر است با:

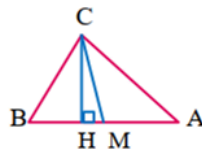
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$M = (3, 2)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 3}{4 - 2} = -1$$

$$\Rightarrow m_{CH} = 1 \Rightarrow \text{معادله } CH: y = x - 2 \Rightarrow x - y - 2 = 0$$

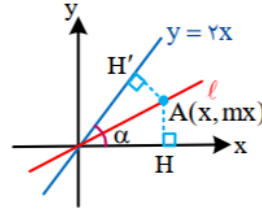
$$MH = \frac{|3 - 2 - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

اگر معادله خط ℓ را به شکل $y = mx$ در نظر بگیریم، هر نقطه روی آن به شکل $A(x, mx)$ است. هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس فاصله نقطه $A(x, mx)$ از محور x ها و خط $y - 2x = 0$ باید به یک فاصله باشد.

پاسخ تشریحی:



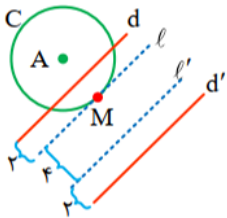
$$\begin{cases} AH = mx \\ A(x, mx), y - 2x = 0 \rightarrow AH' = \frac{|mx - 2x|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \end{cases}$$

$$AH = AH' \rightarrow \frac{|x||m-2|}{\sqrt{5}} = mx \xrightarrow{x>0} |m-2| = \sqrt{5}m \xrightarrow{\text{توان 2}} m^2 - 4m + 4 = 5m^2 \rightarrow 4m^2 + 4m - 4 = 0$$

$$\rightarrow m^2 + m - 1 = 0 \rightarrow \Delta = 5 \rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{m>0} m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

تمام نقاطی که تفاضل فواصل آن‌ها از d و d' برابر ۴ می‌باشد بر دو خط ℓ و ℓ' قرار دارند که موازی d و d' و بین آن‌ها و به فاصله ۲ و ۶ از آن‌ها می‌باشند. تمام نقاطی که از A به فاصله ۴ می‌باشند بر دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۴ واقع هستند. با توجه به شکل، فاصله A از ℓ برابر ۴ است. در نتیجه این دایره بر ℓ مماس بوده و با ℓ' نقطه مشترک ندارد. بنابراین نقطه M تنها نقطه مجموعه جواب است.



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

چون نقطه $A(m, 2m)$ روی نیمساز زاویه‌ای است که از برخورد خطوط $2x - y + 1 = 0$ و $x + y - 2 = 0$ به وجود می‌آید، پس فاصله نقطه A از این خط‌ها یکسان است. بنابراین:

$$\frac{|2m - 2m + 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|m + 2m - 2|}{\sqrt{1+1}}$$

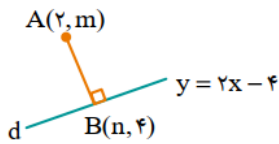
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = |3m - 2| \Rightarrow 3m - 2 = \pm \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{\frac{2}{5}}}{3}$$

بنابراین، حاصل ضرب مقادیر ممکن m برابر است با:

$$\left(\frac{2 + \sqrt{\frac{2}{5}}}{3}\right) \left(\frac{2 - \sqrt{\frac{2}{5}}}{3}\right) = \frac{4 - \frac{2}{5}}{9} = \frac{2}{5}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

مطابق شکل مقابل نقطه B روی خط d قرار دارد، پس:



$$4 = 2n - 4 \Rightarrow n = 4$$

از طرف دیگر، AB بر d عمود است. پس شیب آن عکس و قرینه شیب d است.

$$m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m-4}{2-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m-4}{2-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m-4=1 \Rightarrow m=5$$

پس باید فاصله نقاط A(2, 5) و B(4, 4) را به دست بیاوریم:

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

خطوط $x + 2y - 3 = 0$ و $4x + by - 1 = 0$ موازی اند. پس:

$$-\frac{4}{b} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = 8$$

خطوط $ax + 3y - 5 = 0$ و $2x - y - c = 0$ موازی اند. پس:

$$-\frac{a}{3} = 2 \Rightarrow a = -6$$

فاصله خطهای $ax + 3y - 5 = 0$ و $2x - y - c = 0$ از یکدیگر با فاصله خطهای $4x + by - 1 = 0$ و $x + 2y - 3 = 0$ از یکدیگر برابر است. پس:

$$\frac{\left| -c - \left(\frac{5}{3} \right) \right|}{\sqrt{4+1}} = \frac{\left| -3 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow \left| c + \frac{5}{3} \right| = \frac{11}{4}$$

$$\begin{cases} c + \frac{5}{3} = \frac{11}{4} \Rightarrow c = \frac{13}{12} \\ c + \frac{5}{3} = -\frac{11}{4} \Rightarrow c = -\frac{53}{12} \text{ غقی} \end{cases}$$

$$abc = -6 \times 8 \times \frac{13}{12} = -52$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نقطه M محل برخورد عمودمنصف پاره خط AB با عمودمنصف پاره خط CD است. معادله این خط ها را می نویسیم:

$$AB \text{ وسط: } \left(\frac{2+0}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (1, 1)$$

$$AB \text{ شیب} = \frac{4-2}{2-0} = 2 \Rightarrow AB \text{ عمودمنصف} = -\frac{1}{2}$$

$$AB \text{ عمودمنصف معادله: } y-1 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$CD \text{ وسط: } \left(\frac{4-4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (0, 2)$$

$$CD \text{ شیب: } \frac{0-4}{4+4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow CD \text{ عمودمنصف} = 2$$

$$CD \text{ عمودمنصف معادله: } y-2 = 2(x-0) \Rightarrow y = 2x+2$$

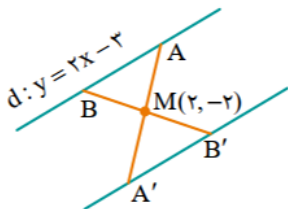
بنابراین باید نقطه برخورد خط های $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ و $y = 2x+2$ را پیدا کنیم.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = 2x+2 \end{cases} \Rightarrow 2x+2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{11}{10}$$

بنابراین $a = -\frac{1}{5}$ و $b = \frac{11}{10}$ و در نتیجه: $ab = -\frac{11}{50}$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

کافی است مطابق شکل زیر، قرینه نقاط دلخواه از خط d مانند A و B را نسبت به نقطه M به دست بیاوریم و معادله خطی که از نقاط A' و B' عبور می کند را بنویسیم.



$$A(0, -2) \quad A'(a, b)$$

$$x_M = \frac{0+a}{2} \Rightarrow 2 = \frac{0+a}{2} \Rightarrow a = 4$$

$$y_M = \frac{-2+b}{2} \Rightarrow -2 = \frac{-2+b}{2} \Rightarrow b = -2$$

$$B(2, 1), \quad B'(c, d)$$

$$x_M = \frac{2+c}{2} = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$y_M = \frac{1+d}{2} = -2 \Rightarrow d = -5$$

بنابراین معادله خطی که از نقاط (4, -2) و (2, -5) می گذرد را می نویسیم:

$$y - (-2) = \frac{-5+1}{2-4}(x-4) \Rightarrow y+2 = 2(x-4) \Rightarrow y = 2x-10$$

تذکر: توجه کنید که شیب خط موردنظر با شیب خط اولیه یکسان است و با داشتن یکی از نقاط A' یا B' هم می توان معادله خط موردنظر را پیدا کرد. همچنین فاصله نقطه M از خط اولیه و خط موردنظر یکسان است و می توانیم از این موضوع برای پیدا کردن معادله خط موردنظر استفاده کنیم.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴

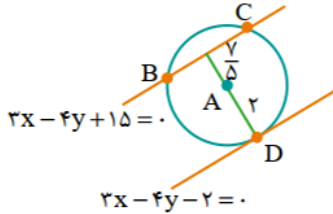
فاصله نقطه $A(0, 2)$ از خط $3x - 4y + 15 = 0$ برابر است با:

$$\frac{|0 - 8 + 15|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{7}{5}$$

همچنین فاصله نقطه $A(0, 2)$ از خط $3x - 4y - 2 = 0$ برابر است با:

$$\frac{|0 - 8 - 2|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$$

از طرف دیگر تمام نقاطی که از نقطه A به فاصله ۲ قرار دارند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ قرار دارند. مطابق شکل زیر، یکی از خط‌های داده شده، دایره موردنظر را قطع می‌کند و دیگری بر دایره مماس است. پس سه نقطه B و C و D نقاط موردنظر هستند.



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵

توجه کنید که خط‌های $y = x - 2$ و $y = -x - 2m$ بر هم عمودند. از طرف دیگر نقاط A و C به صورت زیر معلوم می‌شوند.

$$\begin{aligned} A: \begin{cases} y = -x - 2m \\ y = 2x + m \end{cases} &\Rightarrow 2x + m = -x - 2m \Rightarrow x = -m \Rightarrow y = -m \\ C: \begin{cases} y = 2x + m \\ y = x - 2 \end{cases} &\Rightarrow 2x + m = x - 2 \Rightarrow x = -m - 2 \Rightarrow y = -m - 4 \end{aligned}$$

پس A و C به ترتیب نقاط $(-m, -m)$ و $(-m-2, -m-4)$ هستند.اکنون توجه کنید که اندازه پاره خط AB برابر فاصله نقطه A از خط $x - y - 2 = 0$ است.

$$AB = \frac{|-m + m - 2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$$

به همین ترتیب اندازه پاره خط BC برابر فاصله نقطه C از خط $x + y + 2m = 0$ است.

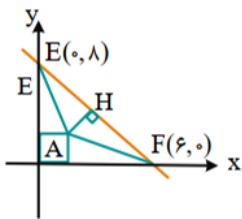
$$BC = \frac{|-m - 2 - m - 4 + 2m|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 2$$

بنابراین مساحت مثلث $\hat{ABC}$ برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶



$$A \left| \begin{array}{l} \Delta: 4x + 3y - 24 = 0 \Rightarrow AH = \frac{|4 + 3 - 24|}{5} = \frac{17}{5} \end{array} \right.$$

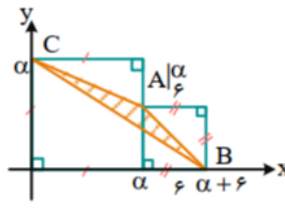
$$EF = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$S = \frac{1}{2} AH \times EF = \frac{1}{2} \times \frac{17}{5} \times 10 = 17$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷

در مثلث ABC داریم: $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} \alpha + 6 \\ \alpha \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha \end{vmatrix}$ ، بنابراین:



$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha & \alpha + 6 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha & \alpha + 6 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + 6\alpha - \alpha^2 - 6\alpha - 36 & \alpha \end{vmatrix} \Rightarrow S = 18$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$C(5, 0), B(3, 2), A(2, 1)$$

$$M \begin{vmatrix} 3+5 \\ 2 \\ 2+0 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

مختصات M وسط ضلع BC را می‌یابیم:

معادله میانه AM را می‌نویسیم: $AM: y = 1$

شیب عمودمنصف AB قرینه و معکوس شیب AB است:

عمودمنصف AB از نقطه N وسط ضلع AB عبور می‌کند.

$$N \begin{vmatrix} 3+2 \\ 2 \\ 2+1 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow N \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$y - \frac{3}{2} = -\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y = -x + 4$$

معادله عمودمنصف AB:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow P(3, 1)$$

دو خط به دست آمده را با یکدیگر قطع می‌دهیم:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

۱۹

نکته: فاصله نقطه $A(x, y)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با: $\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

با توجه به نکته بالا، فاصله نقطه $O(0, 0)$ از خط $2my - mx - 5 = 0$ برابر است با: $\frac{|0 - 0 - 5|}{\sqrt{(2m)^2 + (-m)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5m^2}} = \frac{\sqrt{5}}{|m|}$

طبق فرض این مقدار برابر ۲ است، پس داریم: $\frac{\sqrt{5}}{|m|} = 2 \Rightarrow |m| = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow m = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

بنابراین مقدار مثبت m برابر $\frac{\sqrt{5}}{2}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰

نکته: شیب خط گذرا از دو نقطه A و B برابر است با: $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

برای اینکه سه نقطه $A(2, 3)$ ، $B(4, -1)$ و $C(3a-1, a+1)$ بر یک خط واقع باشند، باید داشته باشیم:

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{-1-3}{4-2} = \frac{a+1-3}{3a-1-2} \Rightarrow -2 = \frac{a-2}{3a-3} \Rightarrow -6a+6 = a-2 \Rightarrow -7a = -8 \Rightarrow a = \frac{8}{7}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱

نکته: دو خط زمانی موازی اند که شیب‌هایشان برابر باشد.

نکته: دو خط زمانی بر هم عمودند که حاصل ضرب شیب‌هایشان برابر -1 باشد.

نکته: در صفحه دو خط عمود بر یک خط، باهم موازی‌اند.

طبق فرض خط $y = ax + b$ بر دو خط $y = (2n-1)x + 3$ و $y = -(n+2)x + 5$ عمود است، پس این دو خط موازی‌اند. بنابراین باید شیب‌هایشان با هم برابر باشد.

$$2n-1 = -n-2 \Rightarrow 3n = -1 \Rightarrow n = -\frac{1}{3} \Rightarrow \text{شیب این دو خط} = -\frac{5}{3}$$

پس شیب خط عمود برابر است با:

$$a = -\frac{1}{-\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲

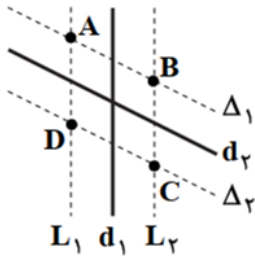
نکته: نقاطی که به فاصله معلوم a از خط d هستند، دو خط به موازات خط d و در دو طرف آن هستند.



نقاطی که از خط d_1 ، ۳ سانتی‌متر فاصله دارند، روی دو خط L_1 و L_2 موازی d_1 و در دو طرف آن قرار دارند.

نقاطی که از خط d_2 ، ۵ سانتی‌متر فاصله دارند، روی دو خط Δ_1 و Δ_2 موازی d_2 و در دو طرف آن قرار دارند.

محل برخورد خط‌های L_1 و L_2 با خط‌های Δ_1 و Δ_2 جواب مسئله است. پس ۴ نقطه با این شرایط وجود دارد (نقاط A, B, C و D).



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳

نکته: دو خط غیرموازی محورهای مختصات، در صورتی برهم عمودند که حاصل ضرب شیب‌هایشان برابر ۱- باشد.

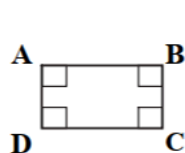
نکته: شیب خط گذرا از نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نکته: معادله خط گذرا از نقطه (x_1, y_1) با شیب m عبارت است از:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

با استفاده از نکات بالا داریم:



$$m_{AB} = \frac{5-3}{-3-2} = -\frac{2}{5} \xrightarrow{\text{BC بر AB عمود است}} m_{BC} = \frac{-1}{-\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{BC معادله: } y - 3 = \frac{5}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 6 = 5x - 10 \Rightarrow 5x - 2y = 4$$

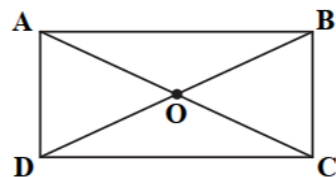
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴

نکته: مختصات نقطه وسط پاره خط AB عبارت است از: $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$.

نکته: در متوازی‌الاضلاع، قطر‌ها منصف یکدیگرند.

چون هر مستطیل، یک متوازی‌الاضلاع است، از نکته بالا نتیجه می‌گیریم قطرهای AC و BD منصف یکدیگرند؛ یعنی نقطه O هم وسط قطر AC است و هم وسط قطر BD . بنابراین:



$$O = \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2} \Rightarrow A+C=B+D$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \alpha - 1 \\ 1 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha\beta = 4$$

تذکر: در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: مختصات نقطهٔ وسط پاره خط AB عبارت است از: $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$

نکته: دو خط غیرموازی با محورهای مختصات برهم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-1) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط m و m' باشد، آنگاه شرط عمود بودن آن‌ها این است که $mm' = -1$. به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینهٔ معکوس شیب دیگری باشد.

نکته: هر نقطه روی عمودمنصف پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و برعکس.

نقاطی که از دو نقطه C و D به یک فاصله‌اند، روی عمودمنصف CD قرار دارند.

ابتدا شیب CD را محاسبه می‌کنیم:

$$m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-3 - 1}{6 - (-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

پس شیب عمودمنصف CD باید قرینه و معکوس $-\frac{1}{2}$ یعنی $m = 2$ باشد.

نقطهٔ وسط پاره خط CD را پیدا می‌کنیم:

$$M = \frac{C+D}{2} = (\frac{6 + (-2)}{2}, \frac{-3 + 1}{2}) = (2, -1)$$

حال معادلهٔ عمودمنصف CD را به دست می‌آوریم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow[m=2]{(2, -1)} y + 1 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 5$$

نقطهٔ A با طول ۱ روی خط $y = 2x - 5$ است، پس عرضش برابر است با:

$$y_A = 2(1) - 5 = -3$$

نقطهٔ B با عرض ۷ روی خط $y = 2x - 5$ است، پس طولش برابر است با:

$$7 = 2x_B - 5 \Rightarrow x_B = 6$$

اختلاف عرض نقطهٔ A و طول نقطهٔ B برابر است با:

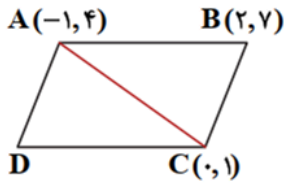
$$|x_B - y_A| = |6 - (-3)| = 9$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

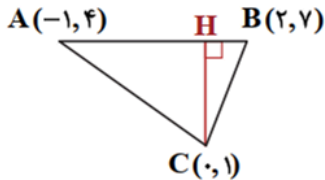
نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ابتدا یک شکل تقریبی رسم می‌کنیم:



اگر مساحت مثلث ABC را پیدا کنیم و آن را در ۲ ضرب کنیم، مساحت متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید.
در مثلث ABC ، قاعده را AB در نظر می‌گیریم:



$$AB = \sqrt{(7-4)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2}$$

طول قاعده برابر است با:

حال معادله ضلع AB را به‌دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{7-4}{2-(-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y-7 = 1(x-2) \Rightarrow x-y+5 = 0$$

فاصله نقطه $C(0, 1)$ از خط $x-y+5 = 0$ ، برابر با طول ارتفاع است:

$$CH = \frac{|0-1+5|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

مساحت $\triangle ABC$ برابر است با:

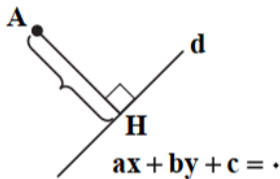
$$S = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}}{2} = 6$$

پس مساحت متوازی‌الاضلاع برابر با $12 = 6 \times 2$ می‌شود.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ ، برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



می‌دانیم شعاع هر دایره، بر خط مماس به دایره، در نقطه تماس عمود است، پس فاصله نقطه $A(4, -2)$ که مرکز دایره است از خط $3x + 4y + a = 4$ ، برابر با شعاع می‌باشد.

ابتدا معادله خط را استاندارد می‌کنیم:

$$3x + 4y + a - 4 = 0$$

اکنون داریم:

$$r = \frac{|3(4) + 4(-2) + a - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow \frac{|12 - 8 + a - 4|}{\sqrt{25}} = 2 \Rightarrow |a| = 10 \Rightarrow a = \pm 10$$

پس مقدار مثبت a برابر با ۱۰ می‌باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نقطه A روی نیمساز ربع اول و سوم (خط $y = x$) را به صورت $A(a, a)$ در نظر می‌گیریم. فاصله A از نقطه B برابر است با:

$$AB = \sqrt{(a-1)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 1 + a^2 + 4a + 4} = \sqrt{2a^2 + 2a + 5}$$

همچنین فاصله نقطه A از خط $x + 2y - 2 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|a + 2a - 2|}{\sqrt{1 + 2^2}} = \frac{|3a - 2|}{\sqrt{5}}$$

این دو فاصله با یکدیگر برابر هستند، پس:

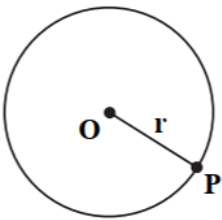
$$\sqrt{2a^2 + 2a + 5} = \frac{|3a - 2|}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{توان } 2} 5(2a^2 + 2a + 5) = 9a^2 - 12a + 4 \Rightarrow a^2 + 22a + 21 = 0 \Rightarrow (a + 21)(a + 1) = 0$$

$$\Rightarrow a = -21 \text{ یا } a = -1$$

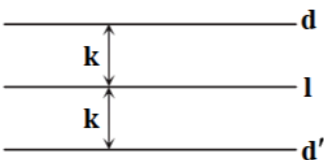
با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: دایره $C(O, r)$ را در نظر بگیرید. هر نقطه که از نقطه O به فاصله r باشد، روی دایره قرار دارد و هر نقطه که روی دایره قرار دارد از نقطه O به فاصله r است.



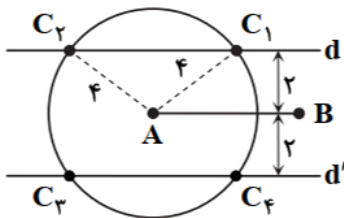
نکته: تمام نقاطی از صفحه که از خط l به فاصله مشخص k هستند، روی دو خط d و d' به موازات خط l و در دو طرف آن قرار دارند.



پاره خط AB را در نظر می‌گیریم. نقاطی که از نقطه A ، ۴ واحد فاصله دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴ واحد هستند.

همچنین نقاطی که از پاره خط AB ، ۲ واحد فاصله دارند، روی دو خط d و d' به موازات AB و به فاصله ۲ واحد از آن هستند.

محل برخورد خط‌های d_1 و d_2 با دایره رسم شده جواب‌های مسئله هستند. پس ۴ نقطه مانند C وجود دارد.



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: شیب خط گذرا از دو نقطه غیر هم طول A و B برابر است با: $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

نکته: مختصات نقطه وسط پاره خط AB، عبارت است از: $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$

نکته: دو خط غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-1) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط m و m' باشد، آنگاه شرط عمود بودن آن‌ها آن است که $mm' = -1$. به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد. می‌دانیم در هر لوزی، قطرهای عمودمنصف هم هستند. پس رأس B که روی قطر BD است، حتماً روی عمودمنصف پاره خط AC قرار دارد. کافی است معادله خط d، عمودمنصف AC را به دست آوریم:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1 - 3}{4 - (-2)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$AC \perp d \Rightarrow m_d = -\frac{1}{m_{AC}} \Rightarrow m_d = \frac{3}{2}$$

$$AC \text{ وسط } M(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}) \Rightarrow M(\frac{4 - 2}{2}, \frac{-1 + 3}{2}) \Rightarrow M(1, 1)$$

$$d \text{ معادله خط: } y - y_0 = m_d(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه‌ای پاسخ است که مختصات آن در خط d صدق کند، پس گزینه ۲ جواب است.

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}(2) - \frac{1}{2} = 2/5 \Rightarrow B(2, 2/5)$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

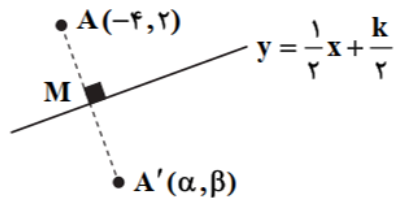
نکته: دو خط غیرموازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر «-۱» باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط m و m' باشد، آنگاه شرط عمود بودن آن‌ها این است که $mm' = -1$. به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد.

نکته: شیب خط گذرا از دو نقطه غیر هم‌طول A و B برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

نکته: مختصات نقطه وسط پاره خط AB عبارت است از:



برای به دست آوردن قرینه نقطه A نسبت به خط $y = x + k$ ، از این نقطه بر خط داده شده عمود می‌کنیم تا نقطه M به دست آید، سپس AM را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا A' ، قرینه نقطه A به دست آید.

نقطه $A'(\alpha, \beta)$ روی نیمساز ناحیه سوم، یعنی خط $y = x$ است، پس $\alpha = \beta$ و در نتیجه $A'(\alpha, \alpha)$ است.

خط گذرنده از AA' بر خط $y = \frac{1}{2}x + \frac{k}{2}$ با شیب $\frac{1}{2}$ عمود است. بنابراین:

$$\begin{cases} A(-4, 2) \\ A'(\alpha, \alpha) \end{cases} \Rightarrow m_{AA'} = \frac{\alpha - 2}{\alpha + 4} \Rightarrow \frac{\alpha - 2}{\alpha + 4} = -2 \Rightarrow \alpha - 2 = -2\alpha - 8 \Rightarrow \alpha = -2 \Rightarrow A'(-2, -2)$$

نقطه M وسط پاره خط AA' است. بنابراین:

$$\begin{cases} A(-4, 2) \\ A'(-2, -2) \end{cases} \Rightarrow M(-3, 0)$$

اکنون داریم:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{k}{2} \quad \text{روی خط } M \Rightarrow 0 = -\frac{3}{2} + \frac{k}{2} \Rightarrow k = 3$$

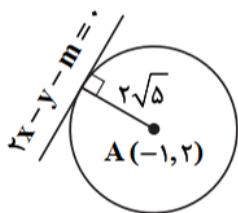
بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است.

نکته: برای یافتن محل برخورد خط با محور طول‌ها، در معادله خط، $y = 0$ را قرار می‌دهیم و مقدار x را می‌یابیم.

چون خط $y = 2x - m$ بر دایره مماس است، فاصله مرکز دایره تا این خط برابر با شعاع دایره است.



$$\frac{|2(-1) - 2 - m|}{\sqrt{4 + 1}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|-4 - m|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |m + 4| = 10 \Rightarrow m + 4 = \pm 10$$

$$\Rightarrow m = 6 \text{ و } m = -14$$

$$-14 + 6 = -8$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳

نکته: فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با:

$$\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

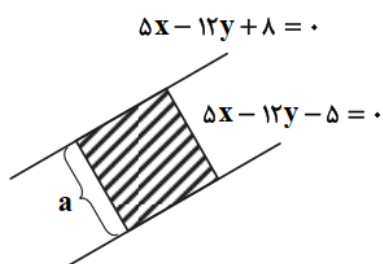
اگر طرفین معادله $-10x+24y+10=0$ را بر -2 تقسیم کنیم، معادله خط $5x-12y+5=0$ حاصل می‌شود. واضح است این خط با خط $5x-12y+8=0$ موازی است.

با توجه به شکل روبه‌رو، فاصله این دو خط موازی که دو ضلع مربع روی آن‌ها قرار دارد، برابر طول ضلع مربع است. پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} 5x-12y+8=0 \\ 5x-12y-5=0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{|8-(-5)|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = \frac{13}{13} = 1$$

$$4a = 4$$

پس محیط این مربع برابر است با:



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$m_{AB} = \frac{-2-1}{4-0} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_{AD} = \frac{4}{3}$$

$$\overline{AD} = \overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\text{AD معادله: } y-1 = \frac{4}{3}(x-0) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x+1 \quad (*)$$

فرض کنید مختصات نقطه D به صورت (x,y) باشد، پس:

$$AD = 5 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 25 \xrightarrow{(*)} x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 25$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 3$$

پس مختصات طول نقطه D در ربع سوم -۳ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴

با توجه به مقدار a و b حاصل x_1 و x_2 را به دست می آوریم:

$$x_1 = \frac{1}{a+1} = \frac{1}{\frac{1}{2+\sqrt{3}}+1} = \frac{1}{\frac{1+2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$x_2 = \frac{1}{b+1} = \frac{1}{\frac{1}{2-\sqrt{3}}+1} = \frac{1}{\frac{1+2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

برای نوشتن معادله‌ی درجه‌ی دوم از رابطه‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ استفاده می کنیم که در آن S جمع ریشه‌ها و P ضرب ریشه‌ها است. پس S و P را حساب می کنیم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 1$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{1}{6}$$

با داشتن S و P معادله‌ی درجه‌ی دوم را می نویسیم.

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{6} = 0 \xrightarrow{\times 6} 6x^2 - 6x + 1 = 0$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

دو فرد A و B هر ۸ ساعت یک دستگاه تولید می کنند پس در هر ساعت $\frac{1}{8}$ دستگاه را تولید می کنند. سرعت فرد A ، ۴ برابر فرد B است پس مدت زمان تولید دستگاه توسط فرد A ، $\frac{1}{4}$ برابر فرد B است.

$$A \text{ سرعت} = 4 \times B \text{ سرعت} \rightarrow t_A = \frac{t_B}{4} \Rightarrow t_B = 4t_A$$

بنابراین اگر فرد A و B به ترتیب در t_A و t_B ساعت یک دستگاه تولید کنند پس در هر ساعت به ترتیب $\frac{1}{t_A}$ و $\frac{1}{t_B}$ از دستگاه را تولید می کنند.

از طرفی دو فرد A و B هر ۸ ساعت یک دستگاه تولید می کنند پس در هر ساعت $\frac{1}{8}$ دستگاه تولید می کنند. لذا داریم:

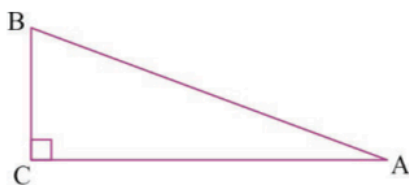
$$\frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B} = \frac{1}{8} \rightarrow \frac{1}{t_A} + \frac{1}{4t_A} = \frac{1}{8} \rightarrow \frac{5}{4t_A} = \frac{1}{8} \rightarrow 4t_A = 40 \rightarrow t_A = 10$$

پس فرد A به تنهایی در ۱۰ ساعت یک دستگاه تولید می کند.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷

در مثلث قائم‌الزاویه ABC زاویه‌ی C قائمه است پس AC عمود بر BC است یعنی شیب آنها قرینه‌ی معکوس است.



شیب AC و BC را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{شیب AC} = \frac{3-0}{-2-2} = -\frac{3}{4}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2m+1 \\ m+2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{شیب BC} = \frac{m+2-3}{2m+1+2} = \frac{m-1}{2m+3}$$

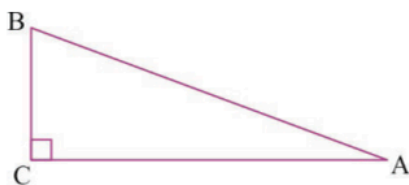
شیب‌ها قرینه‌ی معکوس‌اند پس m به دست می‌آید:

$$\frac{m-1}{2m+3} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3m+12 = 8m-3 \Rightarrow 5m = -15 \Rightarrow m = -3$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸

در مثلث قائم‌الزاویه ABC زاویه‌ی C قائمه است پس AC عمود بر BC است یعنی شیب آنها قرینه‌ی معکوس است.



شیب AC و BC را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{شیب AC} = \frac{3-0}{-2-2} = -\frac{3}{4}$$

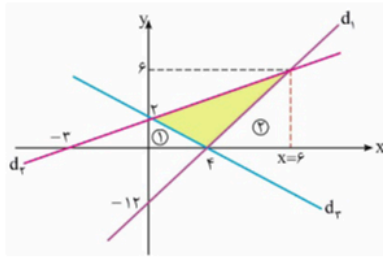
$$B = \begin{bmatrix} 2m+1 \\ m+2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{شیب BC} = \frac{m+2-3}{2m+1+2} = \frac{m-1}{2m+3}$$

شیب‌ها قرینه‌ی معکوس‌اند پس m به دست می‌آید:

$$\frac{m-1}{2m+3} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3m+12 = 8m-3 \Rightarrow 5m = -15 \Rightarrow m = -3$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$d_1: y = 3x - 12 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -12 \\ y = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$



$$d_2: 3y = 2x + 6 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ y = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x + 2 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

$$d_3: 2y = -x + 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ y = 0 = -\frac{1}{2}x + 2 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$d_1 = d_2 \Rightarrow 3x - 12 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow 3x - \frac{2}{3}x = 14 \Rightarrow \frac{7}{3}x = 14 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 6$$

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع ۲ قاعده}}{2} = \frac{(2+6) \times 6}{2} = 24$$

$$S = \frac{4 \times 2}{2} = 4 \quad \text{مثلاً (۱)} \quad S = \frac{2 \times 6}{2} = 6 \quad \text{مثلاً (۲)}$$

$$\text{مساحت مثلث رنگی} = 24 - (6 + 4) = 24 - 10 = 14$$

روش دوم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(4 \times 6 + 6 \times 2 + 0 \times 0) - (4 \times 2 + 0 \times 6 + 6 \times 0)] = \frac{1}{2} |36 - 8| = \frac{1}{2} (28) = 14$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



بچه‌ها یادتونه دوزنقه چی بود؟! آفرین! چهار ضلعی‌ای که فقط دو تا ضلع موازی داره؛ این یعنی AB و CD با هم موازین. خب پس نوشتن معادله خط AB و CD و بعدش هم پیدا کردن نقطه D کار سختی نیست براتون. فرمول ساخت دوزنقه رو که یادتون هست؟! شیب و معادله خط AB را به دست می‌آوریم

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow m = \frac{4-8}{8-4} = -1 \quad y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = -(x - 4) \Rightarrow y = -x + 12$$

چهارضلعی ABCD دوزنقه است پس AB موازی CD است یعنی شیب آنها برابر است. حال با داشتن شیب خط CD و مختصات نقطه C می‌توان معادله خط CD را نوشت:

$$m = -1, c = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = -x + 6 : \text{CD معادله خط}$$

معادله خط CD را داریم و مختصات نقطه‌ی D به صورت $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ است پس می‌توان عرض نقطه‌ی D را حساب کرد.

$$y = -x + 6, x_D = 0 \Rightarrow y_D = 6 \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

طول پاره‌های AB و CD را حساب می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{(8-4)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow CD = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

فاصله دو خط موازی AB و CD ارتفاع دوزنقه است.

$$AB : x + y - 12 = 0, CD : x + y - 6 = 0 \Rightarrow h = \frac{|-6 + 12|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

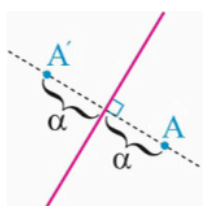
حال با داشتن طول قاعده‌ها و ارتفاع، مساحت دوزنقه به دست می‌آید.

$$S = \frac{1}{2}h(AB + CD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} (4\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) = 30$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



خط گذرنده از A و A' بر خط $y = 2x - 1$ عمود است. مختصات نقطه وسط A و A' را به دست آورده و سپس A' را محاسبه کنید. خط گذرا از دو نقطه A و A' بر خط $y = 2x - 1$ عمود است. پس شیب خط گذرنده از A و A' برابر $-\frac{1}{2}$ است و معادله آن به صورت زیر است:



$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$$

حال مختصات نقطه M، وسط پاره خط AA' را به دست می‌آوریم و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x - 1 \end{cases} \Rightarrow M = (0, -1) \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_M - x_A = 0 - 2 = -2 \\ y_{A'} = 2y_M - y_A = 2(-1) + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(-2, 0)$$

نقطه $A'(-2, 0)$ روی محور xها است، پس فاصله آن تا محور xها، برابر صفر است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲

سرنخ

نقطه‌ای به نمایندگی از تمام نقاط روی خط $y = 2x - 1$ در نظر گرفته و فاصله این نقطه را از مبدأ مختصات و خط $3y - 4x = 2$ ، برابر هم قرار دهید.

مختصات نقاط روی خط $y = 2x - 1$ ، به مختصات $A(x, 2x - 1)$ می‌باشند. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{x^2 + (2x - 1)^2} = \sqrt{5x^2 - 4x + 1}$$

حالا فاصله نقطه $(x, 2x - 1)$ را از خط $-4x + 3y - 2 = 0$ به دست می‌آوریم و با مقدار عبارت فوق برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{|-4x + 3(2x - 1) - 2|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|2x - 5|}{5} \Rightarrow \sqrt{5x^2 - 4x + 1} = \frac{|2x - 5|}{5} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 5x^2 - 4x + 1 = \frac{4x^2 - 20x + 25}{25}$$

$$\Rightarrow 121x^2 - 80x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A(0, -1) \\ x = \frac{80}{121} \Rightarrow A\left(\frac{80}{121}, \frac{39}{121}\right) \end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳

پاسخ تشریحی

گام اول: معادله سهمی با ریشه‌های ۱ و ۴ را که از نقطه $(-1, 10)$ عبور می‌کند، می‌نویسیم:

$$y = A(x - x_1)(x - x_2) = A(x - 1)(x - 4) \xrightarrow{\text{نقطه } (-1, 10) \text{ را قرار می‌دهیم.}} 10 = A(-1 - 1)(-1 - 4) \Rightarrow 10 = 10A \Rightarrow A = 1$$

گام دوم: سهمی به معادله $y = (x - 1)(x - 4)$ محور y ها را در $y = 4$ قطع می‌کند و با توجه به شکل خط از نقطه $(-3, 0)$ و $(0, 4)$ می‌گذرد؛ پس معادله آن به صورت $y = \frac{4}{3}x + 4$ است که به صورت $4x + 12 = 3y$ درمی‌آید.

گام سوم: طرفین معادله $4x + 12 = 3y$ را تقسیم بر ۴ می‌کنیم تا ضرایب a و b ظاهر شوند. داریم:

$$\begin{cases} x + 3 = \frac{3}{4}y \\ ax + 3 = by \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$a + b = 1 + \frac{3}{4} = 1 + 0.75 = 1.75$$

گام چهارم: $a + b$ برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴

پاسخ تشریحی

گام اول: خط با شیب $\frac{-1}{4}$ معادله‌ای به صورت $y = \frac{-1}{4}x + h$ یا $x + 4y + c = 0$ دارد که معادله دوم برای فرمول فاصله مناسب‌تر است. فاصله مبدأ از این خط می‌شود:

$$OH = \frac{|c|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{17}}$$

$$|c| = \sqrt{17} \sqrt{20} = 10$$

طبق صورت سؤال این فاصله $\sqrt{20}$ است و داریم:

گام دوم: پس $c = \pm 10$ و معادله خط $x + 4y \pm 10 = 0$ است که در $A\left(\frac{\pm 10}{4}, 0\right)$ و $B\left(0, \frac{\mp 10}{4}\right)$ محورها را قطع می‌کند و فاصله AB برابر می‌شود با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{10^2 + 25} = \sqrt{125}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵

پاسخ تشریحی

گام اول: مختصات رأس A به صورت $A(a, 0)$ است (چون روی محور X ها است).

گام دوم: A باید از B و C به یک فاصله باشد؛ پس:

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (0-7)^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (a-1)^2 + 9 = (a-3)^2 + 49$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد را باز می‌کنیم}} a^2 - 2a + 1 + 9 = a^2 - 6a + 9 + 49 \xrightarrow{\text{مرتبه می‌کنیم}} 4a = 48 \Rightarrow a = 12$$

گام سوم: با داشتن $A(12, 0)$ و $B(1, 3)$ مختصات وسط ساق AB به صورت $M(\frac{13}{2}, \frac{3}{2})$ است که روی خط $x + y = \frac{16}{2} = 8$ قرار دارد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$m_{AB} = -\frac{1}{2} \rightarrow AB: x + 2y = 13$$

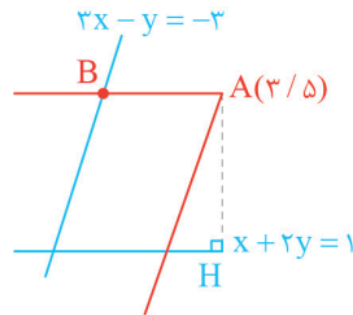
$$B \begin{cases} x + 2y = 13 \\ 3x - y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow B(1, 6)$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 12^2} = \sqrt{5}$$

$$AH = \frac{|x + 2y - 13|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|3 + 12 - 13|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S = AB \cdot AH = 12$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



۴۶

گام اول: نقطه $(\alpha, 0)$ را روی محور X ها در نظر می‌گیریم. فاصله این نقطه از خط $x + 1 = 0$ برابر است با:

$$\frac{|\alpha + 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |\alpha + 1| \quad (*)$$

گام دوم: حالا فاصله نقطه $(\alpha, 0)$ را از نقطه $(2, -1)$ به دست می‌آوریم.

$$\sqrt{(\alpha - 2)^2 + (0 + 1)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 5} \quad (**)$$

گام سوم: طبق صورت سؤال، (*) دو برابر (**) است؛ پس:

$$|\alpha + 1| = 2\sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 5} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 4\alpha^2 - 16\alpha + 20$$

$$\Rightarrow 3\alpha^2 - 18\alpha + 19 = 0 \xrightarrow[|\alpha_1 - \alpha_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}]{\Delta < 0} |\alpha_1 - \alpha_2| = \frac{\sqrt{18^2 - 4 \times 3 \times 19}}{3} = \frac{\sqrt{96}}{3}$$

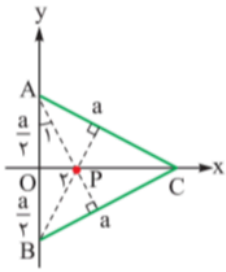
گام چهارم: خواسته سؤال $[\frac{\sqrt{96}}{3}]$ است. از آن جایی که $\sqrt{96} = 9 + P$ است که در آن $0 < P < 1$ می‌باشد؛ پس:

$$[\frac{\sqrt{96}}{3}] = [\frac{9+P}{3}] = [3 + \frac{P}{3}] = 3$$

$0 < \frac{P}{3} < 1$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: شکل سؤال را رسم می‌کنیم.

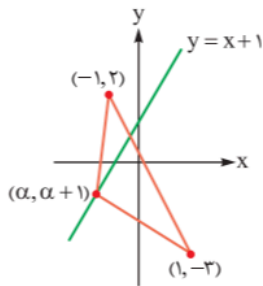


گام دوم: در مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع، میانه و نیمساز بر هم منطبق هستند، بنابراین زاویه A_1 برابر $3^\circ = \frac{6^\circ}{2}$ است؛ هم‌چنین اگر ضلع مثلث را a در نظر بگیریم، $OA = \frac{a}{2}$ است. در مثلث AOP داریم:

$$\tan A_1 = \frac{2}{OA} \Rightarrow \tan 3^\circ = \frac{2}{\frac{a}{2}} \Rightarrow a = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

گام سوم: محیط مثلث برابر با $3a = 12\sqrt{3}$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



گام اول: شکل فرضی مقابل را برای سؤال رسم می‌کنیم:

گام دوم: مختصات رأسی از مثلث که روی خط $y = x + 1$ است را $(\alpha, \alpha + 1)$ در نظر می‌گیریم.

گام سوم: از فرمول مساحت مثلث با داشتن مختصات سه رأس استفاده می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \alpha & \alpha+1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} | ((-1)(-3) + 1(\alpha + 1) + 2\alpha) - (1 \times 2 - 3\alpha - (\alpha + 1)) | \Rightarrow S = \frac{1}{2} | 7\alpha + 3 |$$

گام چهارم: مساحت مثلث را برابر با ۵ قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم.

$$\frac{1}{2} | 7\alpha + 3 | = 5 \Rightarrow | 7\alpha + 3 | = 10 \Rightarrow \begin{cases} 7\alpha + 3 = 10 \Rightarrow 7\alpha = 7 \Rightarrow \alpha = 1 \\ 7\alpha + 3 = -10 \Rightarrow 7\alpha = -13 \Rightarrow \alpha = -\frac{13}{7} \end{cases}$$

طبق صورت سؤال باید α منفی باشد تا رأس مورد نظر در ناحیه سوم باشد.

گام پنجم: عرض رأس سوم برابر با $\alpha + 1 = -\frac{13}{7} + 1 = -\frac{6}{7}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۰

گام اول: دو خط L_1 و L_2 با هم موازی هستند، زیرا:

$$y = \frac{3}{4}x + 1 \xrightarrow{\times 4} 4y = 3x + 4 \Rightarrow L_1: 4y - 3x - 4 = 0$$

همچنین $L_2: 8y - 6x + 3 = 0$ است و شرط $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ برقرار است؛ پس دو خط L_1 و L_2 موازی و غیر منطبق هستند.
گام دوم: شکل سؤال را رسم می‌کنیم.



گام سوم: اگر فاصله دو خط L_1 و L_2 را a در نظر بگیریم، ضلع مربع در حالت اول برابر a است و در حالت دوم قطر مربع برابر a می‌شود و می‌توانیم طول ضلع مربع را به دست آوریم.

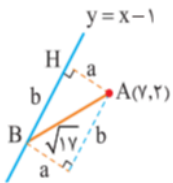
$$\text{ضلع مربع} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\text{ضلع مربع}) \times \sqrt{2} = (\text{قطر مربع})$$

گام چهارم: نسبت مساحت‌ها را می‌نویسیم:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۱

گام اول: اندازه یک ضلع مستطیل برابر با فاصله نقطه $(7, 2)$ از خط $y = x - 1$ است.

$$y = x - 1 \Rightarrow y - x + 1 = 0$$

$$a = \frac{|2 - 7 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

گام دوم: رابطه فیثاغورس را در مثلث ABH می‌نویسیم تا طول ضلع دیگر مستطیل به دست آید.

$$b = \sqrt{(\sqrt{17})^2 - a^2} = \sqrt{17 - 8} = \sqrt{9} = 3$$

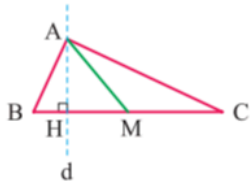
$$S = ab = 2\sqrt{2} \times 3 = 6\sqrt{2}$$

گام سوم: مساحت مستطیل برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: ابتدا یک شکل فرضی از سؤال رسم می‌کنیم.

طول پاره خط MH را باید حساب کنیم.



گام دوم: مختصات نقطه M وسط پاره خط BC را حساب می‌کنیم.

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{0 + (-1)}{2}, \frac{4 + (-1)}{2}\right) \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

گام سوم: عمود AH بر خط d منطبق است و این خط بر پاره خط BC عمود است؛ پس شیب خط d برابر است با:

$$m_d = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}} = -\frac{1}{\frac{4 - (-1)}{0 - (-1)}} = -\frac{1}{5}$$

گام چهارم: خط d با شیب $-\frac{1}{5}$ از نقطه $A(1, 2)$ عبور می‌کند. معادله خط d را می‌نویسیم.

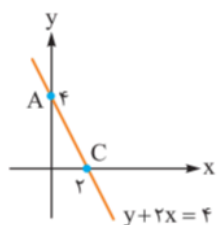
$$d: y - 2 = -\frac{1}{5}(x - 1) \Rightarrow -5y + 10 = x - 1 \Rightarrow 5y + x - 11 = 0$$

گام پنجم: فاصله نقطه M تا خط d برابر با MH است.

$$MH = \frac{\left|5\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} - 11\right|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{26}} = \frac{4\sqrt{26}}{26} = \frac{2}{13} \times \sqrt{26}$$

پس خواسته سؤال $\frac{2}{13}$ است.

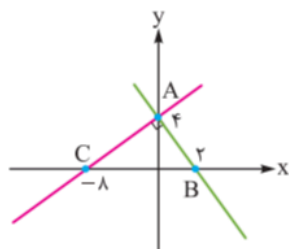
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: ابتدا خط $y + 2x = 4$ را رسم می‌کنیم:

گام دوم: عرض از مبدأ خط $2y + ax = 8$ برابر ۴ است، پس دو خط $y + 2x = 4$ و $2y + ax = 8$ ، در نقطه A متقاطع می‌شوند. حالا برای این که مثلث حاصل از نقاط برخورد دو خط $y + 2x = 4$ و $2y + ax = 8$ با یکدیگر و با محورهای مختصات، قائمه باشد، باید دو خط $y = 2x = 4$ و $2y + ax = 8$ در نقطه A بر هم عمود باشند:

$$\begin{cases} y + 2x = 4 \Rightarrow y = -2x + 4 \\ 2y + ax = 8 \Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + 4 \end{cases} \Rightarrow -2 \times \left(-\frac{a}{2}\right) = -1 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$$

شیب شیب

گام سوم: بنابراین خط $2y + ax = 8$ به صورت $2y - x = 8$ می‌شود. این خط را هم رسم می‌کنیم:

$$\left. \begin{matrix} A(0, 4) \\ B(8, 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB = \sqrt{(0-8)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$

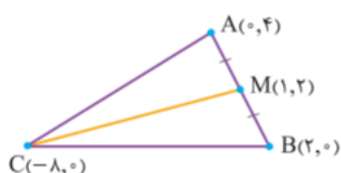
گام چهارم: حالا طول اضلاع این مثلث را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{matrix} A(0, 4) \\ C(-2, 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow AC = \sqrt{(0-(-2))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\left. \begin{matrix} B(8, 0) \\ C(-2, 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC = \sqrt{(8-(-2))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{100+0} = 10$$

نکته: بزرگ‌ترین میانه به کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود.

گام پنجم: طول بزرگ‌ترین میانه مثلث ABC را می‌خواهیم. حالا طبق نکته بالا، چون AB کوچک‌ترین ضلع است، باید طول میانه وارد بر آن را محاسبه کنیم: (M وسط A و B است، پس مختصات آن را با کمک مورد ۲ درسنامه محاسبه می‌کنیم.)



$$M\left(\frac{0+8}{2}, \frac{4+0}{2}\right) \Rightarrow M(4, 2)$$

$$\Rightarrow CM = \sqrt{(-2-4)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: برای پیدا کردن محل برخورد خط $y = 2x + 4$ با محور x ها، کافی است به جای y قرار دهیم صفر:

$$0 = 2x + 4 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2 \xrightarrow{\text{مختصات A}} A(-2, 0)$$

گام دوم: اگر فرض کنیم عرض نقطه M ، برابر m است، در این صورت مختصات نقطه M به صورت $M(0, m)$ می شود.

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (m - 0)^2} = \sqrt{4 + m^2} \quad \text{گام سوم: فاصله A و M برابر است با:}$$

$$d: y = 2x + 4 \Rightarrow -2x + y - 4 = 0 \quad \text{گام چهارم: فاصله M از خط d برابر است با:}$$

$$d \text{ از } M(0, m) \Rightarrow \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|m - 4|}{\sqrt{5}}$$

گام پنجم: می خواهیم فاصله M از A ، $5\sqrt{2}$ برابر فاصله M از خط d باشد، پس:

$$\sqrt{4 + m^2} = 5\sqrt{2} \times \frac{|m - 4|}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 + m^2 = 50 \times \frac{(m - 4)^2}{5}$$

$$\Rightarrow 4 + m^2 = 10(m^2 - 8m + 16) \Rightarrow 4 + m^2 = 10m^2 - 80m + 160$$

$$\Rightarrow 9m^2 - 80m + 156 = 0$$

$$\Rightarrow 9m^2 - 80m + 156 = 0 \Rightarrow m^2 - 8.88m + 17.33 = 0$$

گام ششم: معادله را با روش روسی حل می کنیم:

$$\Rightarrow (m - 26)(m - 54) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 54 \\ m = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \frac{54}{9} = 6 \\ m = \frac{26}{9} \end{cases}$$

بنابراین جواب معادله اصلی برابرند با:

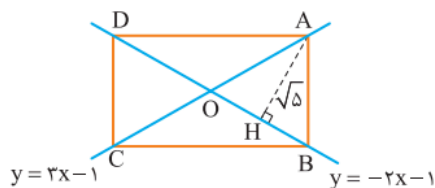
که در بین گزینه ها $m = 6$ را داریم.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۵

پاسخ تشریحی

گام اول: شکل زیر را برای سؤال رسم می‌کنیم. طبق صورت سؤال فرض می‌کنیم فاصله رأس A از قطر BD برابر با $\sqrt{5}$ باشد. این که فاصله کدام رأس از قطر را برابر با $\sqrt{5}$ در نظر بگیریم، در جواب کلی سؤال تفاوتی ایجاد نمی‌کند.



گام دوم: رأس A روی خط به معادله $y = 3x - 1$ قرار دارد؛ پس مختصات آن را می‌توان $A(\alpha, 3\alpha - 1)$ در نظر گرفت. رابطه فاصله نقطه از خط را می‌نویسیم:

$$AH = \frac{|3\alpha - 1 + 2\alpha + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|\alpha|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow |\alpha| = 5 \Rightarrow \alpha = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \Rightarrow A(1, 3 \times 1 - 1) \\ \alpha = -1 \Rightarrow C(-1, 3(-1) - 1) \end{cases}$$

گام سوم: با داشتن مختصات دو رأس $A(1, 2)$ و $C(-1, -4)$ ، طول قطر AC را به دست می‌آوریم:

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

گام چهارم: در مستطیل قطرها با هم برابرند، پس $AC = BD = 2\sqrt{10}$ است و نهایتاً داریم:

$$S_{ABCD} = 2 \times S_{ABD} = 2 \times \frac{1}{2} \times AH \times BD = \sqrt{5} \times 2 \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5 \times \sqrt{2}}} = 10\sqrt{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۶

پاسخ تشریحی

گام اول: مساحت مثلث ABC داده شده است. به کمک مختصات نقطه A و معادله پاره خط BC، طول ارتفاع AH را محاسبه می‌کنیم:

$$AH = \frac{|1 - 3(-3) + 11|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|1+9+11|}{\sqrt{10}} = \frac{21}{\sqrt{10}}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times \frac{21}{\sqrt{10}} BC = 21 \Rightarrow BC = 2\sqrt{10}$$

گام دوم: نقطه M وسط ضلع BC است؛ پس $BM = CM = \sqrt{10}$ می‌شود. فرض می‌کنیم مختصات نقطه B به صورت $(3\alpha - 11, \alpha)$ باشد.

$$BM = \sqrt{10} = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} \Rightarrow 10 = (3\alpha - 11 - 1)^2 + (\alpha - 4)^2$$

در این صورت داریم:

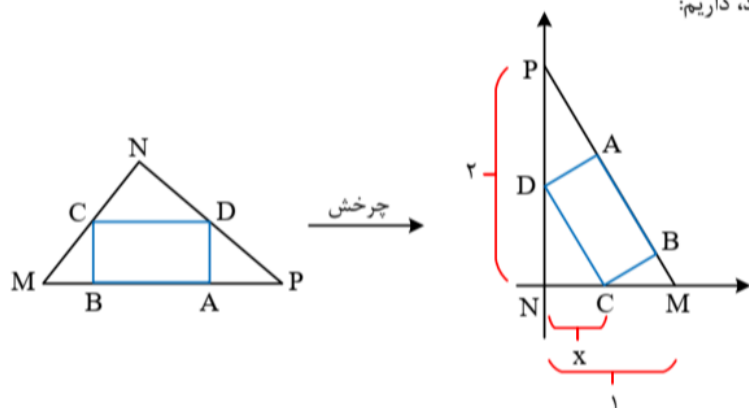
$$\Rightarrow 9\alpha^2 - 72\alpha + 144 + \alpha^2 - 8\alpha + 16 = 10 \Rightarrow 10\alpha^2 - 80\alpha + 150 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 15 = 0 \Rightarrow (\alpha - 3)(\alpha - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \Rightarrow y_B = 3 \\ \alpha = 5 \Rightarrow y_B = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_C = 5 \\ y_C = 3 \end{cases}$$

گام سوم: بنابراین با توجه به گزینه‌ها، نسبت عرض‌های دو رأس B و C برابر با $6/5$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

مثث $\hat{MNP}$ را می چرخانیم تا رأس N روی مبدأ مختصات قرار گیرد، داریم:



به دلخواه، ضلع $\overline{MN}$ را برابر ۱ و $\overline{NP}$ را برابر ۲ قرار می دهیم. (هر جفت عدد دیگری که نسبت ۲ یا $\frac{1}{2}$ داشته باشند را نیز می توان قرار داد.)

چون $\hat{NDC} \sim \hat{MNP}$ پس $y_D = 2x$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix} C \\ D \end{matrix} \begin{matrix} x \\ 2x \end{matrix}$

$$AB: y = -2x + 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} CD = \sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{5}x \\ CB = \frac{|2x - 2|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2-2x}{\sqrt{5}} \end{array} \right\} \Rightarrow S = CB \times CD = \frac{\sqrt{5}x(2-2x)}{\sqrt{5}} = -2x^2 + 2x$$

این تابع زمانی ماکزیمم است که x برابر طول رأس سهمی باشد، یعنی:

$$x = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2}$$

پس نسبت طول به عرض آن برابر است با:

$$\frac{CD}{CB} = \frac{\sqrt{5} \times \frac{1}{2}}{\frac{2-2 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$m_{AB} = m_{CD} = \frac{0 - (-3)}{-4 - 0} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{y - 3 - y}{-1 - x - x} = \frac{-3}{-1 - 2x} = -\frac{3}{4} \Rightarrow -1 - 2x = 4 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \quad A\left(-\frac{5}{2}, y\right) \Rightarrow AD \perp CD$$

$$m_{AD} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{0 - y}{-4 - \left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A\left(-\frac{5}{2}, 2\right) \\ D(-4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow AD = \sqrt{(2-0)^2 + \left(-\frac{5}{2} - (-4)\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D(-4, 0) \\ C(-, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow CD = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (-4 - 0)^2} = 5$$

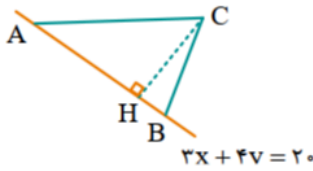
$$S = AD \times CD = \frac{5}{2} \times 5 = 12.5$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۹

طول ارتفاع مثلث CH همان فاصله نقطه C از خط داده شده است.

$$C(2, -2), 3x + 4y - 20 = 0 \Rightarrow CH = \frac{|6 - 8 - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{22}{5}$$



حال مساحت مثلث را می‌نویسیم:

$$S = \frac{AB \times CH}{2} \Rightarrow 11 = \frac{AB \times \frac{22}{5}}{2} \Rightarrow AB = 5$$

فاصله نقطه A از نقطه B برابر ۵ واحد است. چون نقطه B روی خط داده شده قرار دارد، مختصات آن را به صورت $(x, \frac{20-3x}{4})$ در نظر می‌گیریم:

$$A(0,0), B(x, \frac{20-3x}{4}) \Rightarrow AB = \sqrt{(x-0)^2 + (\frac{20-3x}{4}-0)^2} = 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (\frac{20-3x}{4})^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + \frac{9}{16}(x-0)^2} = 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{25}{16}(x-0)^2} = 5 \Rightarrow \frac{5}{4}|x-0| = 5 \Rightarrow |x-0| = 4 \Rightarrow x-0 = \pm 4 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 4$$

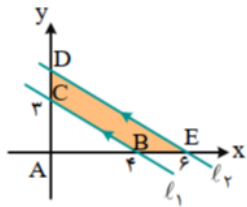
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۰

مثلث‌های ABC و ADE متشابه و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{AB}{AE} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ است. پس نسبت مساحت آن‌ها $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ است.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{\frac{3 \times 4}{2}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{27}{2}$$

$$\text{مساحت فونزقه} = S_{\triangle ADE} - S_{\triangle ABC} = \frac{27}{2} - 6 = \frac{15}{2} = 7.5$$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۱

ارتفاع مثلث‌ها یکسان است، پس باید قاعده‌ها نیز برابر باشند:

$$BD = DE = EF = FC$$

بنابراین نقطه E وسط نقاط B و C است:

$$E \left| \begin{array}{l} \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 \\ \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-4+6}{2} = 1 \end{array} \right.$$

همچنین نقطه F وسط نقاط C و E است:

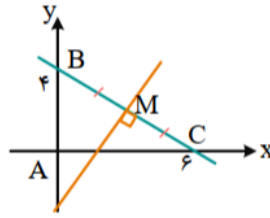
$$F \left| \begin{array}{l} \frac{x_E + x_C}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{y_E + y_C}{2} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

شیب ضلع BC برابر است با:

۶۲

$$B(0, 4), C(6, 0) \Rightarrow m_{BC} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

پس شیب عمودمنصف آن $\frac{3}{2}$ است.

همچنین نقطه M وسط پاره خط BC است:

$$B(0, 4), C(6, 0) \Rightarrow M(3, 2)$$

حال معادله عمودمنصف را می نویسیم:

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 3) \xrightarrow{y=0} -2 = \frac{3}{2}(x - 3) \Rightarrow -\frac{4}{3} = x - 3 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

اختلاف ریشه ها در یک معادله درجه ۲ برابر $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.

۶۳

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{1 - 4(1 - k)}}{2} = \frac{\sqrt{4k - 3}}{2} = \frac{k}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4k - 3}{4} = \frac{k^2}{4} \Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k = 1 \text{ یا } 3$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1 - k}{2} = 0 \text{ یا } -3$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

سه شرط $\Delta > 0$, $P > 0$ و $S > 0$ را بررسی می کنیم.

۶۴

$$\textcircled{1} \Delta = 16a^2 - 4(2a - 1)(2a + 1) = 16a^2 - 16a^2 + 4 = 4$$
 همواره برقرار است.

$$\textcircled{2} S > 0 \Rightarrow \frac{4a}{2a - 1} > 0 \Rightarrow a < 0 \text{ یا } a > \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{3} P > 0 \Rightarrow \frac{2a + 1}{2a - 1} > 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{2} \text{ یا } a > \frac{1}{2}$$

اشتراک تمام نامساوی های بالا به صورت $a < -\frac{1}{2}$ یا $a > \frac{1}{2}$ است که می توان به صورت $|a| > \frac{1}{2}$ نشان داد، پس $|3a| \geq 1$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$x^2 + x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \alpha = -m \\ \beta^2 + \beta = -m \end{cases}$$

$$(2\alpha + 1)^2 + (2\beta + 1)^2 = 14 \Rightarrow 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 + 4\beta^2 + 4\beta + 1 = 14$$

$$\Rightarrow 4(-m) + 1 + 4(-m) + 1 = 14 \Rightarrow m = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۵

۶۶

ریشه‌های سهمی را α و $k\alpha$ فرض کنید. هدف محاسبه k است. طول رأس سهمی برابر $\frac{\alpha + k\alpha}{2}$ است.

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - k\alpha)$$

$$f(0) = 6 \Rightarrow ka\alpha^2 = 6$$

$$f\left(\frac{\alpha + k\alpha}{2}\right) = -2 \Rightarrow a\left(\frac{\alpha + k\alpha}{2} - \alpha\right)\left(\frac{\alpha + k\alpha}{2} - k\alpha\right) = -2 \Rightarrow a\left(\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{1-k}{2}\right)\alpha^2 = -2$$

$$a\alpha^2 = \frac{6}{k} \Rightarrow -\frac{6}{k}\left(\frac{k-1}{2}\right)^2 = -2 \Rightarrow \frac{3}{2}(k^2 - 2k + 1) = 2k$$

$$\Rightarrow 3k^2 - 1 \cdot k + 3 = 0 \xrightarrow{k > 1} k = 3$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۷

ریشه‌های معادله اولیه را α و β و ریشه‌های معادله دوم را $\alpha+1$ و $\beta+1$ فرض می‌کنیم.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{n}{2} \\ \alpha\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 1 + \beta + 1 = -\frac{\Delta}{m} \\ (\alpha + 1)(\beta + 1) = -\frac{3}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2 = -\frac{\Delta}{m} \\ \underbrace{\alpha\beta}_2 + \alpha + \beta + 1 = -\frac{3}{m} \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 1 = -\frac{3}{m} + \frac{\Delta}{m} \Rightarrow m = 2$$

$$-\frac{n}{2} = -\frac{\Delta}{m} - 2 \Rightarrow -\frac{n}{2} = -\frac{\Delta}{2} - 2 \Rightarrow n = 9$$

$$\text{چون } \alpha + \beta = -\frac{n}{2} \text{ و } \alpha + \beta = -\frac{\Delta}{m} - 2 \text{ پس:}$$

بنابراین $m+n=11$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۶۸

$x=1$ را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$1 + m + 2 + 1 = 0 \Rightarrow m = -4$$

$$x^2 - 4x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 1) = 0$$

پس α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 1 = 0$ هستند و در نتیجه $\alpha\beta = -1$ و $\alpha + \beta = 3$ است.

$$S = 1 + \frac{\alpha}{\beta} + 1 + \frac{\beta}{\alpha} = 2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = 2 + \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = 2 + \frac{9 + 2}{-1} = -9$$

$$P = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 = S = -9$$

$$\text{معادله: } x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 9x - 9 = 0$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

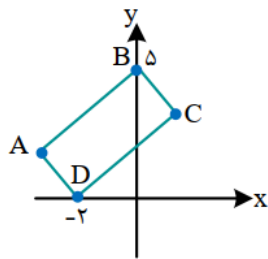
$$\begin{cases} S = a + b = -\frac{\Delta}{4b} \\ P = ab = \frac{a}{4b} \xrightarrow{a \neq 0} b^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{a < b} b = \frac{1}{2} \\ S = a + b = -\frac{\Delta}{4b} \Rightarrow a + \frac{1}{2} = -\frac{\Delta}{2} \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

$$y = 4bx^2 + \Delta x + a = 2x^2 + \Delta x - 3$$

$$\text{رأس: } A\left(-\frac{\Delta}{4}, -\frac{\Delta^2}{4}\right)$$

رأس سهمی در ناحیه سوم است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



مختصات نقطه C را به صورت $(\alpha, 3)$ فرض می‌کنیم و شیب خطوط BC و DC را می‌یابیم:

$$\begin{cases} C(\alpha, 3) \\ B(0, \Delta) \end{cases} \Rightarrow m_1 = \frac{\Delta - 3}{0 - \alpha} = -\frac{2}{\alpha}$$

$$\begin{cases} C(\alpha, 3) \\ D(-2, 0) \end{cases} \Rightarrow m_2 = \frac{3 - 0}{\alpha + 2} = \frac{3}{\alpha + 2}$$

باید $m_1 m_2 = -1$ باشد تا اضلاع BC و CD بر هم عمود باشند:

$$-\frac{2}{\alpha} \times \frac{3}{\alpha + 2} = -1 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 28$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = -1 \pm \sqrt{7} \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = \sqrt{7} - 1$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

اگر قرینه A نسبت به خط $y = -2x + 3$ ، M باشد، یعنی آن که این خط، عمودمنصف A و M است. پس:

$$y = -2x + 3 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow \text{شیب عمود بر آن} = \frac{1}{2}$$

$$m' = \frac{1}{2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

پس نقطه M، روی این خط عمودمنصف است. پس، $M \left| \begin{matrix} \alpha \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} \end{matrix} \right.$. همچنین، نقطه وسط A و M روی خط $y = -2x + 3$ است.

$$H \left| \begin{array}{l} \frac{x_A + x_M}{2} = \frac{3 + \alpha}{2} \\ \frac{y_A + y_M}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\alpha}{4} + \frac{\Delta}{4} \end{array} \right.$$

$$\frac{\alpha}{4} + \frac{\Delta}{4} = -(3 + \alpha) + 3 \Rightarrow \frac{\alpha + \Delta}{4} = -\alpha \Rightarrow \alpha = -1$$

$$d = \frac{\Delta}{\Delta} = 1$$

حال فاصله M را از خط $3y - 4x + 1 = 0$ به دست می‌آوریم. $M \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right.$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۲

چون نقطه $A(m, 2m)$ روی نیمساز زاویه‌ای است که از برخورد خطوط $2x - y + 1 = 0$ و $x + y - 2 = 0$ به وجود می‌آید، پس فاصله نقطه A از این خط‌ها یکسان است. بنابراین:

$$\frac{|2m - 2m + 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|m + 2m - 2|}{\sqrt{1+1}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = |3m - 2| \Rightarrow 3m - 2 = \pm \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{\frac{2}{5}}}{3}$$

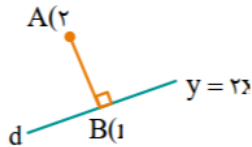
بنابراین، حاصل ضرب مقادیر ممکن m برابر است با:

$$\left(\frac{2 + \sqrt{\frac{2}{5}}}{3}\right)\left(\frac{2 - \sqrt{\frac{2}{5}}}{3}\right) = \frac{4 - \frac{2}{5}}{9} = \frac{2}{5}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۳

مطابق شکل مقابل نقطه B روی خط d قرار دارد، پس:



$$4 = 2n - 4 \Rightarrow n = 4$$

از طرف دیگر، AB بر d عمود است. پس شیب آن عکس و قرینه شیب d است.

$$m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m - 4}{2 - n} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m - 4}{2 - 4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m - 4 = 1 \Rightarrow m = 5$$

پس باید فاصله نقاط $A(2, 5)$ و $B(4, 4)$ را به دست بیاوریم:

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۴

اولاً AB موازی CD است پس شیب آنها برابر است.

$$m_{CD} = m_{AB} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{-2-1}{a-2} \Rightarrow a = -2$$

$$AB = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - (-2))^2} = 5$$

$$AC = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 1 + 7|}{\sqrt{9+16}} = \frac{9}{5}$$

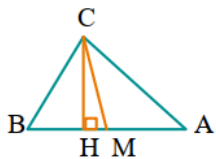
$$S = AB \times AC = 5 \times \frac{9}{5} = 9$$

حال طول AB و AC (فاصله A تا خط CD) را به دست می‌آوریم:

و در نهایت مساحت مستطیل برابر است با:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۵



$$M = (2, 2)$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-2}{4-2} = -1$$

$$\Rightarrow m_{CH} = 1 \Rightarrow CH \text{ معادله: } y = x - 2 \Rightarrow x - y - 2 = 0$$

$$MH = \frac{|3 - 2 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

از آنجائیکه دو خط موازی هستند؛ داریم:

۷۶

$$\begin{cases} 2y - x = 7 \\ 4y - ax = 2 \end{cases} \xrightarrow{+2} 2y - \frac{a}{2}x = 1 \xrightarrow{\text{در دو خط موازی ضرائب یکسان هستند}} \frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2$$

فاصله این دو خط موازی طول قطر دایره است، بنابراین:

$$\begin{aligned} 2y - x - 7 &= 0 \\ 2y - x - 1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{|-7 - (-1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$2r = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 \Rightarrow S = \pi \left(\frac{9}{5} \right) = 1.8\pi$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$-\frac{4}{b} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = 8$$

خطوط $x + 2y - 3 = 0$ و $4x + by - 1 = 0$ موازی اند. پس:

$$-\frac{a}{3} = 2 \Rightarrow a = -6$$

خطوط $ax + 2y - 5 = 0$ و $2x - y - c = 0$ موازی اند. پس:فاصله خط‌های $ax + 2y - 5 = 0$ و $2x - y - c = 0$ از یکدیگر با فاصله خط‌های $4x + by - 1 = 0$ و $x + 2y - 3 = 0$ از یکدیگر برابر است. پس:

$$\frac{\left| -c - \left(\frac{5}{2} \right) \right|}{\sqrt{4+1}} = \frac{\left| -3 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow \left| c + \frac{5}{2} \right| = \frac{11}{4}$$

$$\begin{cases} c + \frac{5}{2} = \frac{11}{4} \Rightarrow c = \frac{13}{4} \\ c + \frac{5}{2} = -\frac{11}{4} \Rightarrow c = -\frac{53}{4} \end{cases}$$

$$abc = -6 \times 8 \times \frac{13}{4} = -52$$

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$x_M = \frac{-1+5}{2} = 2, \quad y_M = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

M وسط BC است پس:

۷۸

$$m_{AM} = \frac{1-1}{2-(-3)} = 0$$

بنابراین شیب AM صفر است و معادله آن به صورت $y = 1$ است.

$$m_{AC} = \frac{-1-1}{5-(-3)} = -\frac{1}{4}$$

از طرفی مختصات وسط AC برابر $(1, 0)$ است و شیب AC برابر $\left(-\frac{1}{4} \right)$ است.پس معادله عمودمنصف AC که شیب آن برابر ۴ است (معکوس و قرینه $-\frac{1}{4}$) و از $(1, 0)$ می‌گذرد به صورت $y - 0 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x - 4$ است و طول نقطه برخورد آن با خط $y = 1$ برابر $\left(\frac{5}{4} \right)$ است.

$$y = 4x - 4 \xrightarrow{y=1} 1 = 4x - 4 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۷۹

$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

اگر طرفین معادله $-10x + 24y + 10 = 0$ را بر ۲ تقسیم

کنیم، معادله خط $5x - 12y - 5 = 0$ حاصل می‌شود. واضح

است این خط با خط $5x - 12y + 8 = 0$ موازی است.

با توجه به شکل روبه‌رو، فاصله این دو خط موازی که دو

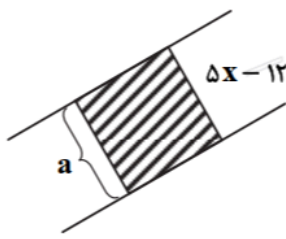
ضلع مربع روی آن‌ها قرار دارد، برابر طول ضلع مربع است.

بنابراین:

$$a = \frac{|8 - (-5)|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{13}{13} = 1$$

$$5x - 12y + 8 = 0$$

$$5x - 12y - 5 = 0$$



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۰

نکته: برای حل معادلات رادیکالی، ابتدا با کمک توان‌رسانی، رادیکال(ها) را حذف می‌کنیم. سپس معادله حاصل را حل می‌نماییم. در پایان،

قابل قبول بودن هر یک از جواب‌ها را بررسی می‌کنیم.

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x} = 2 \Rightarrow \sqrt{3x-2} = 2 - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان } 2} 3x-2 = 4 - 4\sqrt{x} + x \Rightarrow 4\sqrt{x} = -2x+6$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = -x+3 \xrightarrow{\text{توان } 2} 4x = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow (x-9)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=9 \end{cases}$$

مقدار $x=9$ در معادله اصلی صدق نمی‌کند و تنها $x=1$ قابل قبول است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۱

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است.

چون خط $y = 2x - m$ بر دایره مماس است، فاصله مرکز دایره تا این خط برابر با شعاع دایره است.

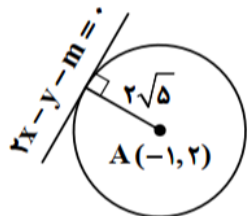
$$\frac{|2(-1) - 2 - m|}{\sqrt{4+1}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{|-4-m|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |m+4| = 10 \Rightarrow m+4 = \pm 10$$

$$\Rightarrow m=6 \text{ و } m=-14$$

$$-14+6 = -8$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای m برابر است با:



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۲

نکته: ضابطه نمودار تابع درجه ۲ (سهمی) را می توان به صورت های زیر نوشت:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad \alpha \text{ و } \beta: \text{ صفرهای تابع}$$

$$y - y_S = a(x - x_S)^2 \quad (x_S, y_S): \text{ مختصات نقطه رأس سهمی}$$

با توجه به اینکه صفرهای تابع درجه دو مقادیر ۱- و ۵ هستند، پس معادله تابع به صورت $f(x) = a(x - 5)(x + 1)$ است. از طرفی نقطه $(-2, 0)$ عضو تابع است، پس:

$$-2 = a(0 - 5)(0 + 1) \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{5}(x - 5)(x + 1) = \frac{2}{5}(x^2 - 4x - 5) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{8}{5}x - \frac{10}{5} \Rightarrow a + b + c = \frac{2}{5} - \frac{8}{5} - \frac{10}{5} = -\frac{16}{5} = -\frac{32}{10} = -3.2$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۳

نکته: معادله درجه دومی که مجموع ریشه های آن برابر S و حاصل ضرب آن ها برابر P باشد، به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ است.

فرض کنیم $\alpha = 2 + \sqrt{4 - \sqrt{5}}$ و $\beta = 2 - \sqrt{4 - \sqrt{5}}$ در این صورت داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = 2 + \sqrt{4 - \sqrt{5}} + 2 - \sqrt{4 - \sqrt{5}} = 4 \\ P = \alpha\beta = (2 + \sqrt{4 - \sqrt{5}})(2 - \sqrt{4 - \sqrt{5}}) = 4 - (4 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + \sqrt{5} = 0$$

حال با توجه به نکته بالا، معادله مورد نظر به صورت زیر است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}$$

نکته: اگر α و β ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

اگر ریشه های این معادله درجه دوم را α و β بنامیم، داریم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{(m+4)}{2} \quad \text{و} \quad P = \alpha\beta = \frac{-m}{2}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = \frac{(m+4)^2}{4} - 2 \times \left(\frac{-m}{2}\right) = \frac{m^2 + 8m + 16}{4} + m = \frac{m^2 + 12m + 16}{4}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 5(\alpha + \beta) \Rightarrow \frac{m^2 + 12m + 16}{4} = 5\left(\frac{m+4}{2}\right) \Rightarrow m^2 + 12m + 16 = 10m + 40$$

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\Rightarrow m^2 + 2m - 24 = 0 \Rightarrow (m - 4)(m + 6) = 0 \Rightarrow m = 4 \text{ یا } m = -6$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۴

۸۵

نکته: اگر $x = a$ ریشه معادله باشد؛ یعنی $x = a$ در معادله صدق می‌کند.

$x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله می‌باشد، پس کافیه مقدار $x = 1$ را در معادله قرار دهیم:

$$\frac{2k}{3} - \frac{4}{12} = \frac{k-1}{3} \Rightarrow \frac{2k}{3} - \frac{1}{3} = \frac{k-1}{3} \xrightarrow{\times 3} 2k - 1 = k - 1 \Rightarrow k = 0$$

با جای گذاری $k = 0$ ، معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$\frac{0}{3x} - \frac{4x}{(x+2)(x+3)} = \frac{-x}{x^2(x+2)} \xrightarrow{x \neq 0} \frac{4}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \frac{1}{x^2 \cancel{(x+2)}} \Rightarrow 4x^2 = x + 3$$

$$\Rightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

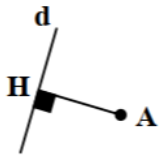
$$\alpha^2 + k^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 0^2 = \frac{9}{16}$$

پس ریشه دیگر معادله که همان α می‌باشد برابر $-\frac{3}{4}$ است. بنابراین داریم:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۶

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:



$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

طول ارتفاع وارد بر ضلع AC در واقع فاصله نقطه B تا پاره خط AC می‌باشد، پس ابتدا باید معادله خطی که از نقاط A و C می‌گذرد را به دست آوریم:

$$\begin{cases} A(2, 2) \\ C(0, -4) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{2 - (-4)}{2 - 0} \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y = 2x + b \xrightarrow{C(0, -4)} y = 2x - 4$$

اکنون معادله خط را استاندارد کرده و فاصله نقطه B از آن را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ B(4, -1) \end{cases} \Rightarrow BH = \frac{|2(4) - (-1) - 4|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \Rightarrow BH = \sqrt{5}$$

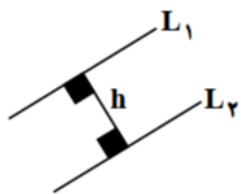
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۷

نکته: اگر دو خط موازی باشند، شیب آن‌ها با هم برابر است.

نکته: اگر $y = mx + h$ باشد، شیب خط برابر m و اگر معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ باشد، شیب آن برابر $-\frac{a}{b}$ می‌باشد.

نکته: اگر دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ مفروض باشند، فاصله آن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$h = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \Rightarrow 2x - y + 3 = 0 \Rightarrow m = 2 \\ 4x - 2y = 7 \Rightarrow 4x - 2y - 7 = 0 \Rightarrow m = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{فاصله دو ضلع موازی همان طول ضلع مربع است.}$$

دو خط با هم موازی هستند، ولی برای استفاده از رابطه بالا باید ضرایب x و ضرایب y در هر دو خط با یکدیگر برابر باشد، پس معادله خط اول

$$\begin{cases} 4x - 2y + 6 = 0 \\ 4x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{|6 + 7|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} \Rightarrow h = \frac{13}{\sqrt{20}} \Rightarrow \text{مساحت مربع} = \left(\frac{13}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{169}{20}$$

را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۸۸

نکته: دو خط غیرموازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر (-۱) باشد.

$$m = \frac{-3m+2}{\Delta-m}$$

شیب خط $(3m-2)x + (\Delta-m)y - 7 = 0$ برابر است با:

$$m' = \frac{m+1}{2m-4}$$

شیب خط $(m+1)x - (2m-4)y + 1 = 0$ برابر است با:

برای عمودبودن باید حاصل ضرب شیب‌ها برابر -۱ باشد:

$$mm' = -1 \Rightarrow \left(\frac{-3m+2}{\Delta-m}\right)\left(\frac{m+1}{2m-4}\right) = -1 \Rightarrow (-3m+2)(m+1) = (m-\Delta)(2m-4)$$

$$\Rightarrow -3m^2 - m + 2 = 2m^2 - 4m + 20 \Rightarrow \Delta m^2 - 13m + 18 = 0 \Rightarrow \Delta = 169 - 360 < 0$$

بنابراین به‌ازای هیچ مقدار m ، این دو خط بر هم عمود نیستند.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

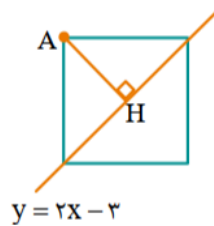
۸۹

رأس $A(1,4)$ بر قطر $y = 2x - 3$ قرار ندارد. بنابراین فاصله A از این قطر برابر نصف طول قطر است.

$$\left. \begin{aligned} y - 2x + 3 &= 0 \\ A(1,4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow AH = \frac{|4 - 2 + 3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta}} = \sqrt{\Delta}$$

$$\Rightarrow \text{اندازه قطر } d = 2\sqrt{\Delta}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2} \times 20 = 10$$



(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۰

باید فاصله A تا خط BC برابر 2 باشد ($AH = 2$) تا مساحت مثلث برابر 5 شود زیرا:

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (2 - \Delta)^2} = \Delta$$

$$S = \frac{AH \times BC}{2} \Rightarrow \Delta = \frac{AH \times \Delta}{2} \Rightarrow AH = 2$$

از طرفی معادله BC به‌صورت $3x + 4y - 11 = 0$ است. چون A روی خط $y = 1 - x$ است مختصات آن به‌صورت $(x, 1-x)$ است و

فاصله A تا BC (AH) به‌صورت زیر است:

$$AH = \frac{|3x + 4(1-x) - 11|}{\sqrt{9+16}} = 2 \Rightarrow |-x-7| = 10 \Rightarrow x = 3, x = -17$$

یعنی مختصات A یا $(3, -2)$ بوده یا $(-17, 18)$ که $(3, -2)$ طول مثبت دارد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۱

ابتدا مختصات رأس A را یافته و سپس از ویژگی عمود بودن اضلاع استفاده کنید. **سرنخ**

$$B(0, -2), D(-7, -5), C(a, 0)$$

مجموع مختصات دو رأس مقابل هم برابرند.

$$\begin{cases} y_B + y_D = y_A + y_C \Rightarrow -2 - 5 = y_A + 0 \Rightarrow y_A = -7 \\ x_B + x_D = x_A + x_C \Rightarrow 0 - 7 = x_A + a \Rightarrow x_A = -7 - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(-7-a, -7) \xrightarrow{\text{طبق شکل}} x_A < x_C \rightarrow -7-a < a \rightarrow a > -\frac{7}{2}$$

$$m_{AD} \times m_{AB} = -1 \Rightarrow \frac{-5+7}{-7+7+a} \times \frac{-2+7}{0+7+a} = -1 \Rightarrow \frac{2}{a} \times \frac{5}{7+a} = -1 \Rightarrow a(7+a) = -10 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \checkmark \\ a = -5 \times \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(-5, -7) \\ D(-7, -5) \end{cases} \Rightarrow AD: y = -x - 12 \xrightarrow{x=0} y = -12$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



بچه‌ها یادتونه دوزنقه چی بود؟! آفرین! چهار ضلعی‌ای که فقط دو تا ضلع موازی داره؛ این یعنی AB و CD با هم موازین. خب پس نوشتن معادله خط AB و CD و بعدش هم پیدا کردن نقطه D کار سختی نیست براتون. فرمول ساخت دوزنقه رو که یادتون هست؟!

روش اول: شیب و معادله خط AB را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow m = \frac{4-8}{8-4} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = -(x - 4) \Rightarrow y = -x + 12$$

چهارضلعی ABCD دوزنقه است پس AB موازی CD است یعنی شیب آنها برابر است. حال با داشتن شیب خط CD و مختصات نقطه C می‌توان معادله خط CD را نوشت:

$$m = -1, c = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = -x + 6$$

معادله خط CD:

معادله‌ی خط CD را داریم و مختصات نقطه‌ی D به صورت $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ است پس می‌توان عرض نقطه‌ی D را حساب کرد.

$$y = -x + 6, x_D = 0 \Rightarrow y_D = 6 \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

طول پاره‌خط‌های AB و CD را حساب می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{(8-4)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow CD = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

فاصله دو خط موازی AB و CD ارتفاع دوزنقه است.

$$AB: x + y - 12 = 0, CD: x + y - 6 = 0 \Rightarrow h = \frac{|-6 + 12|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

حال با داشتن طول قاعده‌ها و ارتفاع، مساحت دوزنقه به دست می‌آید.

$$S = \frac{1}{2}h(AB + CD) = \frac{1}{2} \frac{6}{\sqrt{2}} (4\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) = 30$$

روش دوم:

$$m_{CD} = m_{AB} = \frac{4-8}{8-4} = -1$$

$$y_{CD} = -x + 6 \xrightarrow{x=0} D(0, 6)$$

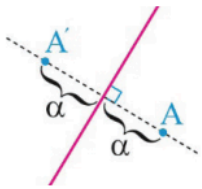
$$\text{مساحت دوزنقه} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 6 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{(16 + 0 + 36 + 0)}_{52} - \underbrace{(24 + 0 + 24 + 64)}_{112} \right) = \frac{60}{2} = 30$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۳

سرنخ

خط گذرنده از A و A' بر خط $y = 2x - 1$ عمود است. مختصات نقطه وسط A و A' را به دست آورده و سپس A' را محاسبه کنید.



خط گذرا از دو نقطه A و A' بر خط $y = 2x - 1$ عمود است. پس شیب خط گذرنده از A و A' برابر $-\frac{1}{2}$ است و معادله آن به صورت زیر است:

$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$$

حال مختصات نقطه M ، وسط پاره خط AA' را به دست می آوریم و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x - 1 \end{cases} \Rightarrow M = (0, -1) \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_M - x_A = 0 - 2 = -2 \\ y_{A'} = 2y_M - y_A = 2(-1) + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(-2, 0)$$

نقطه $A'(-2, 0)$ روی محور x ها است، پس فاصله آن تا محور x ها، برابر صفر است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۴

سرنخ

نقطه‌ای به نمایندگی از تمام نقاط روی خط $y = 2x - 1$ در نظر گرفته و فاصله این نقطه را از مبدأ مختصات و خط $3y - 4x = 2$ برابر

هم قرار دهید.

مختصات نقاط روی خط $y = 2x - 1$ ، به مختصات $A(x, 2x - 1)$ می‌باشند. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA = \sqrt{x^2 + (2x - 1)^2} = \sqrt{5x^2 - 4x + 1}$$

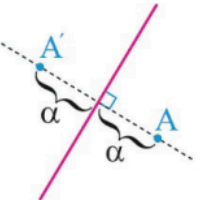
حالا فاصله نقطه $A(x, 2x - 1)$ را از خط $-4x + 3y - 2 = 0$ به دست می‌آوریم و با مقدار عبارت فوق برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{|-4x + 3(2x - 1) - 2|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|2x - 5|}{5} \Rightarrow \sqrt{5x^2 - 4x + 1} = \frac{|2x - 5|}{5} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 5x^2 - 4x + 1 = \frac{4x^2 - 20x + 25}{25}$$

$$\Rightarrow 121x^2 - 80x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A(0, -1) \\ x = \frac{80}{121} \Rightarrow A\left(\frac{80}{121}, \frac{39}{121}\right) \end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۹۵



خط گذرا از دو نقطه A و A' بر خط $y = 2x - 1$ عمود است. پس شیب خط گذرنده از A و A' برابر $-\frac{1}{2}$ است و معادله آن به صورت زیر است:

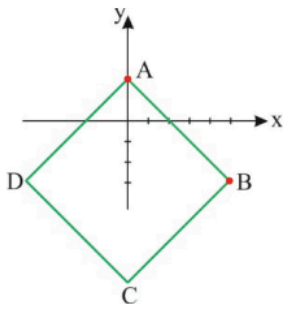
$$y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$$

حال مختصات نقطه M ، وسط پاره خط AA' را به دست می آوریم و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x - 1 \end{cases} \Rightarrow M = (0, -1) \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_M - x_A = 0 - 2 = -2 \\ y_{A'} = 2y_M - y_A = 2(-1) + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(-2, 0)$$

نقطه $A'(-2, 0)$ روی محور x ها است، پس فاصله آن تا محور x ها، برابر صفر است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



$$m_{AB} = \frac{-2-1}{4-0} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_{AD} = \frac{4}{3}$$

$$\overline{AD} = \overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\text{AD معادله: } y-1 = \frac{4}{3}(x-0) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 1 \quad (*)$$

فرض کنید مختصات نقطه D به صورت (x, y) باشد، پس:

$$AD = 5 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-1)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 25 \xrightarrow{(*)} x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 25$$

$$\Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 3$$

پس مختصات طول نقطه D در ربع سوم -۳ است.

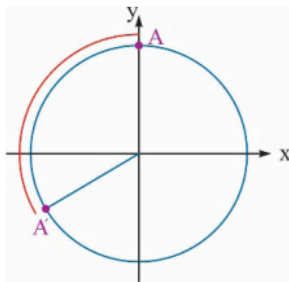
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

$$\frac{14\pi}{3} = 4\pi + \frac{2\pi}{3}$$

ابتدا زاویه $\frac{14\pi}{3}$ را ساده می‌کنیم:

حالا برای این که نقطه $A(0, 1)$ را به اندازه $\frac{14\pi}{3}$ در جهت مثلثاتی دوران دهیم، باید ابتدا 4π یعنی ۲ دور کامل در جهت مثلثاتی

دوران کنیم که در این صورت به مکان اولیه A یعنی $A(0, 1)$ می‌رسیم. سپس $\frac{2\pi}{3}$ دیگر در جهت مثلثاتی حرکت کنیم، پس با فرض $A'(x, y)$ داریم:



$$\begin{cases} x = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس $A'(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ است. بنابراین AA' برابر است با:

$$AA' = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: برای حل یک معادله گویا می توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج ها، در کوچک ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب های به دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و این جواب ها باید در معادله اولیه صدق کنند.

فرض کنیم قیمت هر خودکار x و تعداد خودکارها n باشد، یعنی: $nx = 1000$

اگر رضا روی هر خودکار ۱۵ تومان تخفیف بگیرد قیمت هر خودکار $x - 15$ می باشد و می تواند $n + 1$ خودکار تهیه کند و ۱۰ تومان هم برایش باقی می ماند، یعنی: $(n + 1)(x - 15) = 990$

$$nx = 1000 \Rightarrow n = \frac{1000}{x} \quad (1)$$

$$(n + 1)(x - 15) = 990 \Rightarrow n + 1 = \frac{990}{x - 15} \quad (2)$$

کافیست رابطه شماره (۱) را از رابطه شماره (۲) کم کنیم:

$$n + 1 - n = \frac{990}{x - 15} - \frac{1000}{x} \Rightarrow 1 = \frac{990}{x - 15} - \frac{1000}{x}$$

طرفین رابطه بالا را در $(x - 15)(x)$ ضرب می کنیم:

$$(x - 15)(x) = 990(x) - 1000(x - 15) \Rightarrow x^2 - 15x = 990x - 1000x + 15000$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - 15000 = 0 \Rightarrow (x - 125)(x + 120) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 125 & \checkmark \\ x = -120 & \times \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: دو خط غیرموازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب های آنها برابر (-1) باشد؛ یعنی اگر شیب های دو خط m و m' باشد، آنگاه شرط عمود بودن آنها آن است که $mm' = -1$ ؛ به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد.

نکته: مختصات نقطه وسط پاره خط AB عبارت است از $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$.

نقطه P وسط AC و نقطه N وسط BC است، پس $\frac{PC}{AP} = \frac{CN}{BN} = 1$. از عکس قضیه تالس

نتیجه می گیریم $AB \parallel PN$. پس شیب AB با شیب PN برابر است.

$$m_{AB} = m_{PN} = \frac{-8 - (-5)}{-2 - 0} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

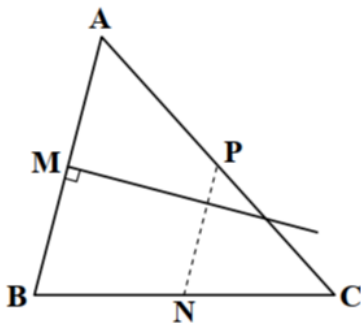
بنابراین شیب عمودمنصف AB برابر $\frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$ و معادله آن به صورت $y = -\frac{2}{3}x + b$ است.

خط عمودمنصف از نقطه $M(-3, 1)$ (وسط پاره خط AB) می گذرد، بنابراین:

$$1 = -\frac{2}{3} \times (-3) + b \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow AB \text{ عمودمنصف معادله } y = -\frac{2}{3}x - 1 \Rightarrow 3y + 2x + 3 = 0$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)



نکته: فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ابتدا مختصات نقطه A را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow 2x + 3x = 5 \Rightarrow x = 1, y = -1$$

حال فاصله نقطه $A(1, -1)$ از خط $y - \sqrt{3}x + 1 = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|-1 - \sqrt{3} + 1|}{\sqrt{1 + 3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته:

$$AB = |x_A - x_B|$$

■ اگر A و B دو نقطه هم عرض در صفحه باشند، آنگاه:

$$AB = |y_A - y_B|$$

■ اگر A و B دو نقطه هم طول در صفحه باشند، آنگاه:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

■ اگر A و B دو نقطه دلخواه در صفحه باشند، آنگاه:

$$AB = 2AC \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4} = 2\sqrt{\alpha^2 + 1}$$

مختصات نقطه A را به صورت $A(\alpha, 0)$ در نظر می گیریم و داریم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \alpha^2 + 1 - 2\alpha + 4 = 4(\alpha^2 + 1) \Rightarrow 3\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = \frac{-(-1)}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته:

■ اگر A و B دو نقطه هم‌عرض در صفحه باشند، آنگاه:

$$AB = |x_A - x_B|$$

■ اگر A و B دو نقطه هم‌طول در صفحه باشند، آنگاه:

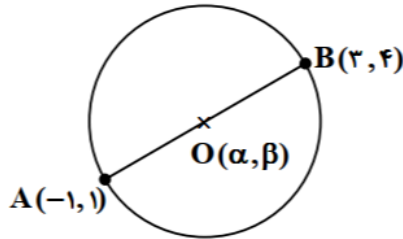
$$AB = |y_A - y_B|$$

■ اگر A و B دو نقطه دلخواه در صفحه باشند، آنگاه:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

نکته: مختصات نقطه وسط پاره خط AB عبارت است از:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



با توجه به شکل، AB قطر دایره و O که وسط AB است مرکز دایره می‌باشد.

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3-1}{2} = 1 & \beta = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \\ AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \Rightarrow r = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{r}{\alpha + \beta} = \frac{\frac{5}{2}}{1 + \frac{5}{2}} = \frac{5}{7}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

نکته: فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

مرکز دایره با مختصات $O(a, b)$ روی قطر $y = 2x - 5$ قرار دارد، پس $b = 2a - 5$. فاصله نقاط A و B روی دایره از مرکز دایره یکسان است، پس:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(a-3)^2 + (b+7)^2} = \sqrt{(a+3)^2 + (b+1)^2} \Rightarrow (a-3)^2 + (2a-5+7)^2 = (a+3)^2 + (2a-5+1)^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 6a + 9 + 4a^2 + 8a + 4 = a^2 + 6a + 9 + 4a^2 - 16a + 16 \Rightarrow 2a + 13 = -10a + 25 \Rightarrow 12a = 12 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین مختصات نقطه O (مرکز دایره) به صورت $O(1, 2 \times 1 - 5)$ یعنی $O(1, -3)$ است؛ بنابراین شعاع دایره برابر است با:

$$OA = \sqrt{(1-3)^2 + (-3+7)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۴

نکته: فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.
ابتدا با حل دستگاه زیر محل برخورد دو خط را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} y - 2x - 1 = 0 & (1) \\ y + 2x - 9 = 0 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)+(2)} 2y = 10 \Rightarrow y = 5 \xrightarrow{\text{جای گذاری در (1)}} x = 2$$

پس محل برخورد دو خط نقطه $B(2, 5)$ است. نقطه A روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم است، پس آن را به صورت $A(a, -a)$ در نظر می گیریم.

طبق فرض فاصله A تا B برابر ۵ است، پس داریم:

$$\begin{aligned} |AB| = 5 &\Rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (-a-5)^2} = 5 \\ \Rightarrow a^2 - 4a + 4 + a^2 + 10a + 25 &= 25 \Rightarrow 2a^2 + 6a + 4 = 0 \\ \Rightarrow a^2 + 3a + 2 &= 0 \Rightarrow (a+1)(a+2) = 0 \Rightarrow a = -1, -2 \end{aligned}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۵

نکته: فرض کنیم α و β ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، در این صورت داریم: $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

نکته: اگر α و β دو عدد حقیقی باشند، $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ ، آنگاه معادله درجه دومی که ریشه های آن α و β باشد، عبارت است از:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

فرض کنیم α و β ریشه های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ باشند، در این صورت داریم: $S = \alpha + \beta = -\frac{7}{3}$ ، $P = \alpha\beta = \frac{1}{3}$

طبق فرض، ریشه های معادله $x^2 + mx + n = 0$ به صورت $\alpha + 1$ و $\beta + 1$ است. پس داریم:

$$\begin{cases} S' = (\alpha + 1) + (\beta + 1) = \alpha + \beta + 2 = -\frac{7}{3} + 2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3} \\ P' = (\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 1 = -1 \Rightarrow n = -1 \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۶

نکته: برای حل یک معادله گویا می توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج ها، در کوچک ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب های به دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و این جواب ها باید در معادله اولیه صدق کنند.

در کسر $\frac{x^2-5}{4-x^2}$ ، از مخرج منفی فاکتور گرفته و کنار کسر قرار می دهیم:

$$\frac{x+1}{2x-4} - \frac{x^2-5}{x^2-4} = \frac{2x}{x+2} \Rightarrow \frac{x+1}{2(x-2)} - \frac{x^2-5}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x}{x+2}$$

با توجه به تجزیه مخرج ها، ک.م.م مخرج ها عبارت $2(x-2)(x+2)$ است:

$$\left[\frac{x+1}{2(x-2)} - \frac{x^2-5}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x}{x+2} \right] \times 2(x-2)(x+2)$$

$$(x+1)(x+2) - 2(x^2-5) = (2x)(2)(x-2) \Rightarrow x^2 + 3x + 2 - 2x^2 + 10 = 4x^2 - 8x \Rightarrow 5x^2 - 11x - 12 = 0$$

$$\Delta = (-11)^2 - 4(5)(-12) = 361$$

$$x = \frac{11 \pm 19}{10} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \quad \checkmark \\ x_2 = -\frac{4}{5} \quad \checkmark \end{cases} \Rightarrow x_1 - x_2 = 3 - \left(-\frac{4}{5}\right) = 3\frac{4}{5}$$

پس اختلاف ریشه های معادله $3\frac{4}{5}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۷

با فرض $A(a,0)$ و $D(b,0)$ ، عرض نقاط B و C را پیدا می کنیم:

$$d_1: y - 2x - 6 = 0 \xrightarrow{x=a} y = 2a + 6 \Rightarrow B(a, 2a + 6)$$

$$d_2: 4x + 3y - 18 = 0 \xrightarrow{x=b} y = 6 - \frac{4}{3}b \Rightarrow C(b, 6 - \frac{4}{3}b)$$

حال برای این که چهارضلعی ABCD مستطیل باشد، باید نقاط B و C هم عرض باشند:

$$2a + 6 = 6 - \frac{4}{3}b \Rightarrow a = -\frac{2}{3}b \Rightarrow b = -\frac{3}{2}a$$

رابطه مساحت مستطیل را پیدا می کنیم و بیشترین مقدار آن را به دست می آوریم:

$$S = AD \times AB = (b - a) \times (2a + 6) = \left(-\frac{3}{2}a - a\right)(2a + 6) = -\frac{5}{2}a \times (2a + 6) = -5a^2 - 15a \Rightarrow S' = -10a - 15 = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow S_{\max} = -5\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 15\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{45}{4}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۸

مطابق شکل پاره‌خط‌های AC و BC بر هم عمودند، پس $m_{BC} \times m_{AC} = -1$ است:

$$\Rightarrow \frac{4-0}{8-x} \times \frac{4-y}{8-0} = -1 \Rightarrow y = 20 - 2x$$

حالا طول پاره خط AB را پیدا می‌کنیم:

$$AB = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (20 - 2x)^2} = \sqrt{4x^2 - 80x + 400}$$

$$\xrightarrow{(AB)'=0} (AB)' = \frac{1 \cdot x - 80}{2\sqrt{4x^2 - 80x + 400}} = 0 \Rightarrow x = 8$$

به‌ازای $x = 8$ کمترین طول پاره‌خط AB به‌دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{8^2 + (20 - 16)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۰۹

می‌دانیم $D(a, b)$ می‌باشد پس $A(a, 0)$ است پس داریم:

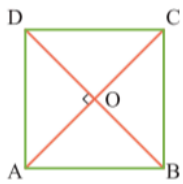
$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = (x_B - x_A)(y_D - y_A) \xrightarrow{b=\sqrt{a}} S_{ABCD} = (6-a)(\sqrt{a}-0) = -a\sqrt{a} + 6\sqrt{a}$$

بنابراین داریم:

$$S'_{ABCD} = 0 \rightarrow -\frac{3}{2}\sqrt{a} + \frac{3}{\sqrt{a}} = 0 \rightarrow -\frac{3}{2}\sqrt{a} = -\frac{3}{\sqrt{a}} \Rightarrow a = 2$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۰

پاسخ تشریحی گام اول: فرض کنید در مربع ABCD، $B(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$ و $D(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ باشد.

در این صورت طول قطر BD و معادله خط گذرنده از قطر BD را به دست می‌آوریم:

$$BD \text{ طول قطر } BD = \sqrt{(\frac{1}{4} - \frac{3}{4})^2 + (\frac{1}{4} + \frac{3}{4})^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$BD \text{ شیب خط } m_{BD} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$BD \text{ معادله } y - \frac{1}{4} = -2(x - \frac{1}{4}) \Rightarrow y - \frac{1}{4} = -2x + \frac{1}{2} \Rightarrow 2x + y - \frac{3}{4} = 0$$

گام دوم: قطرهای مربع عمودمنصف‌های یکدیگرند، بنابراین رئوس A و C روی عمودمنصف پاره‌خط BD قرار دارند. از طرفی می‌دانیم هر نقطه واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس مثلاً برای نقطه $A(x, y)$ داریم:

$$AB = AD \Rightarrow \sqrt{(x - \frac{3}{4})^2 + (y + \frac{3}{4})^2} = \sqrt{(x - \frac{1}{4})^2 + (y - \frac{1}{4})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} \Rightarrow 2x = 4y + 4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۱

پاسخ تشریحی

گام اول: رابطه صورت سؤال را می‌نویسیم:

$$|\alpha - \beta| = \frac{\gamma}{\delta}(\alpha + \beta)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = \frac{49}{25}(\alpha + \beta)^2$$

و سپس طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

گام دوم: از روابط معروف بین α و β (همان‌هایی که در درس‌نامه پاسخ قبل مثال زدیم) استفاده می‌کنیم:

$$S^2 - 2P - 2P = \frac{49}{25}S^2 \Rightarrow \frac{24}{25}S^2 = -4P \Rightarrow 6S^2 = -25P$$

$$6 \times \frac{m^2}{4} = 25 \times \frac{r^2}{2} \Rightarrow m^2 = 25 \xrightarrow{m>0} m = 5$$

گام سوم: حال $S = \frac{m}{2}$ و $P = -\frac{r}{2}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:دقت کنید که طبق رابطه گام اول مجموع $(\alpha + \beta)$ و در نتیجه m باید مثبت باشد.

$$m + \frac{1}{m} = 5 + \frac{1}{5} = 5\frac{1}{5}$$

گام چهارم: حاصل نهایی برابر است با:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۲

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا از تغییر متغیر $x^2 = t$ استفاده می‌کنیم تا معادله داده‌شده به معادله‌ای از درجه دوم تبدیل شود:

$$x^6 + 6x^2 - 8 = 0 \xrightarrow{x^2=t} t^3 + 6t - 8 = 0$$

گام دوم: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های این معادله درجه دوم را پیدا می‌کنیم. اگر ریشه‌های معادله را t_1 و t_2 بنامیم، آن‌گاه داریم:

$$t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} = -6, \quad t_1 t_2 = \frac{c}{a} = -8$$

گام سوم: با توجه به تغییر متغیر $x^2 = t$ ، مقادیر t_1 و t_2 را برحسب α و β می‌نویسیم.

$$\alpha^2 = t_1, \beta^2 = t_2$$

$$t_1 + t_2 = -6 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = -6$$

$$t_1 t_2 = -8 \Rightarrow \alpha^2 \beta^2 = -8 \Rightarrow (\alpha\beta)^2 = -8 \Rightarrow \alpha\beta = -2$$

گام چهارم: مقدار عبارت صورت سؤال را با توجه به مقادیر به دست آمده محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta} = \frac{\beta^3 + \alpha^3}{\alpha\beta} = \frac{-6}{-2} = 3$$

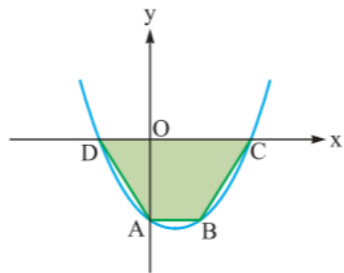
(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۱۳

پاسخ تشریحی

گام اول: ابتدا محل برخورد سهمی با محور y ها را تعیین می‌کنیم:

$$f(x) = ax^2 - 2x - 6 \xrightarrow{x=0} f(0) = a(0)^2 - 2(0) - 6 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow A(0, -6)$$

گام دوم: طول قاعده‌های دوزنقه را به دست می‌آوریم. با توجه به جهت بازشدن سهمی، بدیهی است $a > 0$ می‌باشد.

$$f(x) = ax^2 - 2x - 6 \xrightarrow{f(x)=-6} ax^2 - 2x - 6 = -6$$

$$\Rightarrow ax^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(ax - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ x_B = \frac{2}{a} \end{cases} \Rightarrow AB = \frac{2}{a}$$

$$f(x) = ax^2 - 2x - 6 \xrightarrow{y=0} ax^2 - 2x - 6 = 0$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \xrightarrow{a>0} |x_C - x_D| = \frac{\sqrt{4 + 24a}}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{1 + 6a} \Rightarrow CD = \frac{2}{a}\sqrt{1 + 6a}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: ابتدا نقاط تلاقی سهمی با جهت مثبت محورهای X و Y را تعیین می‌کنیم:

$$x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow A(0,3)$$

$$y=0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow B(3,0)$$

سپس معادله خط گذرنده از نقاط A و B را تعیین می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{0-3}{3-0} = -1$$

$$AB \text{ معادله: } y-3 = -1(x-0) \Rightarrow x+y-3=0$$

گام دوم: با تعیین مختصات رأس سهمی، فاصله آن از خط گذرنده از نقاط A و B را محاسبه می‌کنیم:

$$(x \text{ رأس سهمی}) \quad x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2(-1)} \Rightarrow x=1 \Rightarrow y = -1^2 + 2(1) + 3 = 4 \Rightarrow S(1,4)$$

$$AB \text{ فاصله } S = \frac{|1+4-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

ابتدا α را پیدا می‌کنیم. فاصله AB برابر با $\sqrt{10}$ است. بنابراین:

$$AB = \sqrt{(3-\alpha)^2 + (2\alpha-1-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\rightarrow (3-\alpha)^2 + (2\alpha-4)^2 = 10$$

$$\rightarrow 5\alpha^2 - 22\alpha - 64 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \alpha = 6/5 \end{cases} \text{ غق قق}$$

چون نقطه $A(\alpha, 3)$ در ناحیه دوم قرار دارد پس $\alpha = -2$ را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$A(-2, 3), B(3, -5)$$

$$M\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{3-5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

مختصات نقطه وسط پاره خط AB برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5-3}{3-(-2)} = \frac{-8}{5} \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} \frac{5}{8} = \text{شیب عمود منصف}$$

حال شیب پاره خط AB و شیب عمود منصف را پیدا می‌کنیم:

$$y - y_M = +\frac{5}{8}(x - x_M) \rightarrow y - (-1) = \frac{5}{8}\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow 16y = 10x - 21$$

معادله عمود منصف برابر است با:

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا شیب دو خط داده شده را به دست می آوریم. با توجه به اینکه دو ضلع مجاور مستطیل عمود بر هم هستند، داریم:

$$\begin{cases} ay + 4x = 3 \Rightarrow m_1 = -\frac{4}{a} \\ y = (a+1)x - 3 \Rightarrow m_2 = a+1 \end{cases} \Rightarrow m_1 \times m_2 = \frac{-4a-4}{a} = -1 \Rightarrow -4a-4 = -a \Rightarrow a = -\frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3}y + 4x - 3 = 0 \\ y + \frac{1}{3}x + 3 = 0 \end{cases}$$

فاصله محل برخورد قطرها از ضلع های مجاور مستطیل، یک بار برابر با نصف عرض و یک بار برابر با نصف طول مستطیل است. پس داریم:

$$d_1 = \frac{|-\frac{4}{3}(1) + 4(1) - 3|}{\sqrt{\frac{16}{9} + 16}} = \frac{|-\frac{1}{3}|}{\sqrt{\frac{10 \cdot 16}{9}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}\sqrt{10}} = \frac{1}{4\sqrt{10}} \Rightarrow 2d_1 = \frac{1}{2\sqrt{10}}$$

$$d_2 = \frac{|(1) + \frac{1}{3}(1) + 3|}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}}} = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{1}{3}\sqrt{10}} = \frac{13}{\sqrt{10}} \Rightarrow 2d_2 = \frac{26}{\sqrt{10}} \Rightarrow S = \frac{26}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{2\sqrt{10}} = \frac{13}{10} = 1.3$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گام اول: در معادله داده شده تغییر متغیر $x^2 - x = t$ را در نظر می گیریم:

$$(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 15 = 0 \\ \xrightarrow{x^2 - x = t} t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow (t - 3)(t - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = 3 \\ x^2 - x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 \\ x^2 - x - 5 = 0 \end{cases}$$

گام دوم: اگر α و β ریشه های یک معادله درجه دوم باشند، مجموع معکوس آن ها برابر می شود با:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$$

گام سوم: می دانیم که $S = \frac{-b}{a}$ و $P = \frac{c}{a}$ ، در هر دو معادله به دست آمده $ac < 0$ ؛ پس هر معادله دارای دو جواب است، برای به

$$x^2 - x - 3 = 0 \xrightarrow{a=1, b=-1, c=-3} \frac{S}{P} = \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3} \quad \text{دست آوردن مجموع معکوس ریشه های هر کدام خواهیم داشت:}$$

$$x^2 - x - 5 = 0 \xrightarrow{a=1, b=-1, c=-5} \frac{S}{P} = \frac{1}{-5} = \frac{-1}{5}$$

گام چهارم: خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{-1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{-5-3}{15} = \frac{-8}{15}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: می‌دانیم که $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ ، پس ک. م. م. مخرج‌ها برابر می‌شود با $(x-1)(x+1)$. دو طرف معادله را در آن ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{k}{x^2-1} \xrightarrow[\times(x-1)(x+1)]{\text{دوطرف}} x(x-1) - (x+1) = k$$

$$\Rightarrow x^2 - x - x - 1 = k \Rightarrow x^2 - 2x - (k+1) = 0$$

گام دوم: واسطه هندسی دو ریشه $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، پس اگر α و β ریشه‌هایمان باشند داریم:

$$\alpha\beta = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

گام سوم: حاصل ضرب ریشه‌ها یا همان P برابر $\frac{1}{2}$ است، در نتیجه:

$$P = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \xrightarrow[a=1]{c=-(k+1)} -(k+1) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow k+1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = -\frac{3}{2} = -1.5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: سرعت ثابت اتومبیل را برابر v در نظر می‌گیریم، از آن جا که $v = \frac{x}{t}$ و طول مسیر 800 کیلومتر است خواهیم داشت:

$$v = \frac{x}{t} \Rightarrow v = \frac{800}{t} \quad (*)$$

گام دوم: به گفته سؤال اگر 20 کیلومتر بر ساعت به سرعت اتومبیل اضافه شود، مسیر را دو ساعت زودتر طی می‌کند، پس در

رابطه $v = \frac{800}{t}$ به جای v ، $v+20$ و به جای t ، $t-2$ را قرار می‌دهیم:

$$v = \frac{800}{t} \Rightarrow v+20 = \frac{800}{t-2} \quad (**)$$

گام سوم: $(*)$ را در $(**)$ جای گذاری می‌کنیم:

$$v+20 = \frac{800}{t-2} \xrightarrow{v=\frac{800}{t}} \frac{800}{t} + 20 = \frac{800}{t-2} \Rightarrow \frac{800}{t-2} - \frac{800}{t} = 20$$

$$\xrightarrow{\div 20} \frac{40}{t-2} - \frac{40}{t} = 1 \Rightarrow \frac{40t - 40t + 80}{t(t-2)} = 1 \Rightarrow t(t-2) = 80 \Rightarrow t = 10$$

گام چهارم: حالا که $t = 10$ و $x = 800$ را داریم، مقدار v را به دست می‌آوریم:

$$v = \frac{x}{t} \Rightarrow v = \frac{800}{10} = 80$$

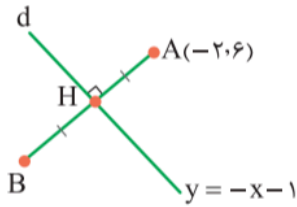
گام پنجم: اگر 30 کیلومتر بر ساعت از سرعت کاسته شود سرعت برابر 50 کیلومتر بر ساعت می‌شود، از طرفی مسافت هم 800

است، پس خواسته سؤال که زمان است برابر می‌شود با:

$$50 = \frac{800}{t} \Rightarrow t = \frac{800}{50} = 16 \text{ ساعت}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: ابتدا شکلی فرضی رسم می‌کنیم تا خواسته مسئله را واضح‌تر درک کنیم:



گام دوم: با توجه به شکل رسم‌شده، ما به دنبال مختصات نقطه B هستیم؛ پس ابتدا معادله خط AB را به کمک شیب و نقطه $(-2, 6)$ مشخص می‌کنیم:

$$d \perp AB \Rightarrow m_d \times m_{AB} = -1 \Rightarrow m_{AB} = 1$$

$$y - 6 = 1(x + 2) \Rightarrow y = x + 8$$

گام سوم: مختصات نقطه H محل برخورد خط d و AB است:

$$x + 8 = -x - 1 \Rightarrow x = \frac{-9}{2} \Rightarrow y = \frac{7}{2} \Rightarrow H\left(\frac{-9}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

گام چهارم: نقطه H، مختصات وسط دو نقطه A و B است؛ پس:

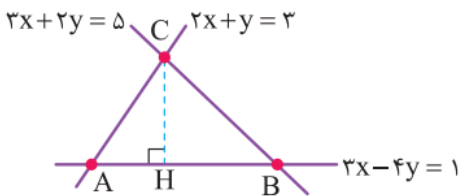
$$H = \frac{A+B}{2} \Rightarrow B = 2H - A = (-9, 7) - (-2, 6) = (-7, 1)$$

گام پنجم: حال فاصله نقطه $B(-7, 1)$ را از مبدأ مختصات حساب می‌کنیم:

$$OB = \sqrt{(-7-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

گام اول: ابتدا شکل مقابل را در نظر بگیرید:



گام دوم: با توجه به شکل، اندازه ارتفاع CH برابر فاصله نقطه C از ضلع AB است؛ مختصات نقطه C را به دست می‌آوریم:

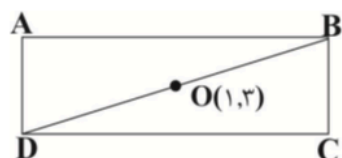
$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 1 \Rightarrow C(1, 1)$$

گام سوم: حال فاصله نقطه C را از ضلع AB به دست می‌آوریم:

$$CH = \frac{|3 - 4 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{2}{5} = 0.4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۲



$$D(\alpha, \alpha + 1)$$

$$m_{BC} = \frac{-1}{m_{CD}} = -1$$

چون خط BC بر CD عمود است پس:

و با استفاده از نقطه C(۳,۴) داریم: $BC: y = -x + 7 \Rightarrow B(\beta, -\beta + 7)$ پس:

$$\begin{cases} 1 = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ 2 = \frac{(\alpha + 1) + (-\beta + 7)}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 2 \Rightarrow B(2, 5) \Rightarrow 2 + 5 = 7$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۳

$$\begin{cases} |AB| = 3 \\ |AC| = 4 \\ |BC| = 5 \end{cases} \rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} 2R &= 5 \\ R &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow S = \pi R^2 \rightarrow S = \frac{25}{4} \pi$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

$$m_{BC} = \frac{-2 - 0}{0 - 1} = 2$$

$$\rightarrow y - 0 = 2(x - 1)$$

$$\rightarrow 2x - y = 2$$

$$K = \frac{\alpha a + \beta b + c}{a^2 + b^2} = \frac{0 \times 2 + 1 \times (-1) - 2}{4 + 1} = -\frac{3}{5} \rightarrow A' \begin{cases} \alpha - 2aK = \frac{12}{5} \\ \beta - 2bK = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۵

معادلات اضلاع را باهم قطع می دهیم و سه تا دستگاه دو معادله دو مجهول حل می کنیم تا مختصات راس های A ، B و C به دست آید:

$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4x + 3y - 27 = 0 \end{cases} \rightarrow A(3, 5)$$

$$\begin{cases} 4x + 3y - 27 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow C(6, 1)$$

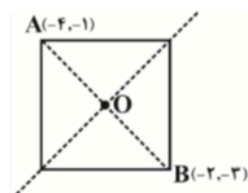
$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow B(1, 1)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۶

می دانیم مرکز مربع وسط قطر AB است. پس:



$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4 + (-2)}{2} = -3 \quad y_O = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 + (-3)}{2} = -2$$

چون O روی خط $my + (m - 2)x = 1$ قرار دارد، لذا مختصات آن در معادله خط صدق می کند:

$$m(-2) + (m - 2)(-3) = 1 \Rightarrow -2m - 3m + 6 = 1 \Rightarrow 5m = 5 \Rightarrow m = 1$$

مساحت مربعی به طول ضلع $2m + 1 = 3$ برابر است با ۹.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۷

شیب خط $y = 2x + 1$ برابر ۲ است. همچنین شیب خط $4x - 2y + 5 = 0$ که

همان خط $y = 2x + \frac{5}{2}$ است نیز برابر ۲ می‌باشد. پس دو خط داده‌شده، دو ضلع

موازی لوزی هستند.

فاصله این دو ضلع موازی برابر ارتفاع لوزی است.

برای پیدا کردن فاصله این دو خط، فاصله نقطه دلخواه $(0, 1)$ روی خط $y = 2x + 1$

را از خط $4x - 2y + 5 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$h = \frac{|4 \times 0 - 2 \times 1 + 5|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{20}}$$

مساحت لوزی مانند مساحت هر متوازی‌الاضلاع، از ضرب ارتفاع در قاعده به دست می‌آید. طول ارتفاع لوزی برابر $h = \frac{3}{\sqrt{20}}$ بوده و طول

قاعده آن (طول هر یک از اضلاعش) برابر $a = 10$ است، پس مساحت لوزی برابر است با:

$$S = h \times a = \frac{3}{\sqrt{20}} \times 10 = \frac{30}{\sqrt{20}} \times \sqrt{20} = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۸

فرض کنید مختصات نقطه C به صورت $C(x, y)$ باشد. زاویه $\hat{A}$ برابر 90° است، پس:

$$AB \perp AC \Rightarrow m_{AB} \times m_{AC} = -1$$

$$\frac{-2+1}{0+3} \times \frac{y+2}{x-0} = -1 \Rightarrow \frac{y+2}{x} = 3 \Rightarrow y = 3x - 2 \quad (1)$$

همچنین مثلث ABC متساوی‌الساقین است، پس:

$$AB = AC \Rightarrow \sqrt{(0+3)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9+1 = x^2 + (y+2)^2 \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۲)، داریم:

$$10 = x^2 + (3x - 2 + 2)^2 \Rightarrow 10 = 10x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

نقطه C در ربع اول است، پس $x = -1$ غیر قابل قبول است. پس $x = 1$ ؛ در نتیجه $y = 1$ و $x + y = 2$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۲۹

ابتدا مختصات نقطه M وسط پاره خط AB و سپس شیب خط گذرنده از A و B را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A(4, -1) \\ B(-2, \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(\frac{-2+4}{2}, \frac{\alpha-1}{2}) \Rightarrow M(1, \frac{\alpha-1}{2}) \\ \text{شیب } AB = m = \frac{\alpha+1}{-2-4} = \frac{\alpha+1}{-6} \end{cases}$$

عمود منصف AB از نقطه M می‌گذرد و شیب آن عکس و قرینه شیب AB است؛ بنابراین معادله آن به صورت زیر است:

$$\text{شیب عمود منصف } AB = \frac{6}{\alpha+1} \xrightarrow{y-y_0=m(x-x_0)} y - \frac{\alpha-1}{2} = \frac{6}{\alpha+1}(x-1)$$

طبق فرض مسئله، عمود منصف AB از نقطه $(0, 1)$ عبور می‌کند؛ بنابراین مختصات آن در معادله عمود منصف صدق می‌کند و داریم:

$$\xrightarrow{\substack{x=0 \\ y=1}} 1 - \frac{\alpha-1}{2} = \frac{6}{\alpha+1}(0-1) \Rightarrow \frac{3-\alpha}{2} = \frac{-6}{\alpha+1} \Rightarrow 3\alpha+3-\alpha^2-\alpha = -12$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 15 = 0 \Rightarrow (\alpha-5)(\alpha+3) = 0 \Rightarrow \alpha = 5, -3$$

پس اختلاف مقادیر ممکن برای α ، برابر $8 = 5 - (-3)$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۰

نقطه M روی خط $y = \frac{3}{4}x$ قرار دارد، پس شیب OM برابر $\frac{3}{4}$ است؛ یعنی:

$$\tan \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{MB}{MO} = \frac{3}{4}$$

پس اگر $MB = 3k$ باشد، آنگاه $MO = 4k$ است. ($k \neq 0$)

از طرفی $OB = 10$ و وتر مثلث OMB است؛ بنابراین:

$$MB^2 + OM^2 = OB^2 \Rightarrow (3k)^2 + (4k)^2 = 10^2$$

$$\Rightarrow 25k^2 = 100 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

بنابراین طول MB برابر ۶ و طول OM برابر ۸ است.

خط گذرنده از مبدأ و نقطه C، بر OM عمود است، پس معادله آن به صورت زیر است:

$$m_{OM} = \frac{3}{4} \Rightarrow m_{OC} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \text{معادله OC: } y = -\frac{4}{3}x$$

اگر $C(\alpha, \beta)$ باشد، چون C روی خط $y = -\frac{4}{3}x$ است، پس $\beta = -\frac{4}{3}\alpha$. حال داریم:

$$MB = OC = 6 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 6 \xrightarrow{\text{توان}} \alpha^2 + \left(-\frac{4}{3}\alpha\right)^2 = 36 \Rightarrow \frac{25\alpha^2}{9} = 36$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm \frac{18}{5} \xrightarrow{\alpha > 0} \beta = -\frac{4}{3} \times \frac{18}{5} = -\frac{24}{5} = -4\frac{4}{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

چون OABC مربع است، پس باتوجه به شکل، طول و عرض نقطه B برابر است، پس آن را به صورت $B(a, a)$ فرض می کنیم. حالا چون

نقطه B روی خط $x + 2y - 18 = 0$ قرار دارد، پس در آن صدق می کند:

$$a + 2a - 18 = 0 \Rightarrow a = 6$$

حالا اگر ضلع مربع CDEF، را برابر b در نظر بگیریم، آنگاه $E(b+6, b)$ است. این نقطه نیز روی خط d قرار دارد، پس در آن صدق می کند:

$$(b+6) + 2b - 18 = 0 \Rightarrow 3b = 12 \Rightarrow b = 4$$

پس $E(10, 4)$ است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر است با:

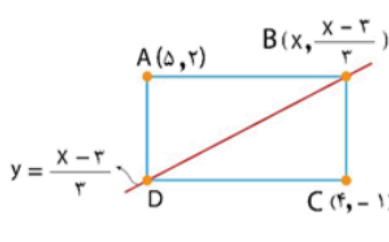
$$OA = \sqrt{(10-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۱

۱۳۲

باتوجه به صورت سؤال نقاط B و D روی خط $y = \frac{x-3}{3}$ قرار دارند. پس مختصات نقطه B را به صورت $(x, \frac{x-3}{3})$ در نظر می‌گیریم. و شیب اضلاع AB و BC را به دست می‌آوریم:



$$m_{AB} = \frac{\frac{x-3}{3} - 2}{x-5} = \frac{x-9}{3(x-5)}$$

$$m_{BC} = \frac{\frac{x-3}{3} - (-1)}{x-4} = \frac{x}{3(x-4)}$$

در ضمن می‌دانیم اضلاع AB و BC بر هم عمودند، پس:

$$m_{AB} \times m_{BC} = -1 \Rightarrow \frac{x-9}{3(x-5)} \times \frac{x}{3(x-4)} = -1$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x = -9(x^2 - 9x + 20) \Rightarrow 10x^2 - 90x + 180 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ x_B = 6 \end{cases}$$

پس $D(3, 0)$ است و محیط مستطیل برابر است با:

$$2(AD + CD) = 2(\sqrt{(5-3)^2 + (2-0)^2} + \sqrt{(4-3)^2 + (-1-0)^2}) = 2(2\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۳

برای تعیین نقطه تلاقی دو خط $2y + x = 1$ و $3y - 4x = 18$ ، کافی است دستگاه حاصل از آن‌ها را حل کنیم:

$$\begin{cases} 3y - 4x = 18 \\ 2y + x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 4x = 18 \\ 8y + 4x = 4 \end{cases} \Rightarrow 11y = 22 \Rightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow x = -3 \Rightarrow \text{مختصات نقطه تلاقی } A(-3, 2)$$

از طرفی شیب خط $2y = -x + 11$ برابر $-\frac{1}{2}$ است، پس شیب خط عمود بر آن برابر $m = 2$ خواهد بود در نتیجه معادله خط مطلوب به صورت زیر است:

$$y - 2 = 2(x + 3) \Rightarrow y = 2x + 8$$

با امتحان گزینه‌ها مشخص می‌شود که خط فوق از نقطه $(1, 1)$ می‌گذرد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۴

معادله خط نیمساز ناحیه دوم و چهارم به صورت $y = -x$ است، پس مختصات نقاطی که روی این خط قرار دارند به صورت $C(\alpha, -\alpha)$ است. فاصله C را از خط $2x - 3y + 12 = 0$ به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d = \frac{|2\alpha + 3\alpha + 12|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|\alpha + 12|}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \frac{|\alpha + 12|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow |\alpha + 12| = 13 \Rightarrow \alpha + 12 = \pm 13 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 12 = 13 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow A(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}) \\ \alpha + 12 = -13 \Rightarrow \alpha = -25 \Rightarrow B(-25, 25) \end{cases}$$

$$\text{مجموع طول‌های نقاط مطلوب} = -5 + \frac{1}{5} = -\frac{24}{5}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۳۵

$$A(\alpha, 1), B(3, 2), C(-1, 3)$$

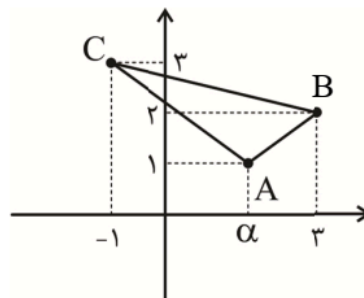
باید $\hat{A} = 90^\circ$ باشد، پس $AC \perp AB$ پس شیب‌های آن در رابطه $m_{AC} \times m_{AB} = -1$ صدق می‌کنند.

$$m_{AC} = \frac{3-1}{-1-\alpha}, \quad m_{AB} = \frac{2-1}{3-\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{-1-\alpha} \times \frac{1}{3-\alpha} = -1 \Rightarrow 2 = (\alpha+1)(3-\alpha)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 = -2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \xrightarrow{\text{روش دلتا}} \alpha = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = 1 + \sqrt{2}$$



نقطه M در وسط وتر BC قرار دارد: $M = \frac{B+C}{2} = (1, \frac{5}{2})$

$$\xrightarrow{\frac{A(1+\sqrt{2}, 1)}{M(1, \frac{5}{2})}} m_{AM} = \frac{\frac{5}{2} - 1}{1 - (1 + \sqrt{2})} = \frac{\frac{3}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{-3}{2\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{4}$$

پس شیب AM برابر است با:

که $-\frac{3}{4}$ برابر $\sqrt{2}$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۶

معادله خطی که از A بر این خط عمود شود می‌نویسیم:

$$3x - y = 2 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow m' = -\frac{1}{3}$$

$$\text{معادله خط: } y - (-1) = \frac{-1}{3}(x - 1) \Rightarrow x + 3y = -2$$

نقطه H در محل برخورد این دو خط قرار دارد:

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 3y = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} x = 0,4, \quad y = -0,8$$

حالا قرینه نقطه A نسبت به H جواب مسئله است:

$$A'' = 2H - A = (2 \times 0,4 - 1, 2(-0,8) - (-1))$$

$$A'' = (-0,2, -0,6)$$

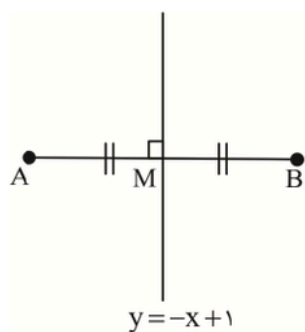
$$\alpha\beta = 0,12$$

پس:

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۷

با توجه به شکل چون نقطه M وسط پاره خط AB است، می توان نوشت: $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$



$$M = (\frac{-2a + b}{2}, \frac{b}{2})$$

و چون نقطه M روی عمودمنصف قرار دارد، پس مختصات آن در $y = -x + 1$ صدق می کند.

$$\frac{b}{2} = \frac{2a - b}{2} + 1 \Rightarrow b = 2a - b + 2 \Rightarrow 2b = 2a + 2 \Rightarrow \boxed{b = a + 1}$$

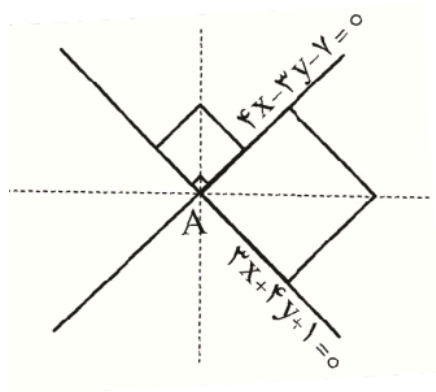
و می دانیم شیب پاره خط AB عکس و قرینه شیب عمودمنصف است.

$$m_{AB} = 1 \rightarrow m_{AB} = \frac{b - 0}{-2a - b} = 1 \Rightarrow b = -2a - b \Rightarrow 2b = -2a \Rightarrow \boxed{b = -a}$$

با حل دستگاه $\begin{cases} b = a + 1 \\ b = -a \end{cases}$ به $\begin{cases} a = \frac{-1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ می رسیم.

پس مختصات A به صورت $(\frac{1}{2}, 1)$ و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر با $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)



(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

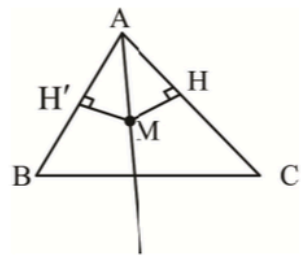
۱۳۸

با توجه به شکل فرضی، قطرهای مربعها، نیمسازهای دو خط هستند.

معادله نیمسازهای دو خط را می یابیم:

$$\frac{|4x - 3y - 7|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|3x + 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \rightarrow |4x - 3y - 7| = |3x + 4y + 1|$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x - 3y - 7 = 3x + 4y + 1 \rightarrow x - 7y - 8 = 0 \\ 4x - 3y - 7 = -(3x + 4y + 1) \rightarrow 7x + y - 6 = 0 \end{cases}$$



نقطه M روی نیمساز زاویه $\hat{A}$ قرار دارد. پس فاصله‌اش از خطوط AB و AC یکسان است.

$$MH = MH'$$

معادله خط عبوری از A و B $A(0, -1)$ $B(-2, 1) \rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1+1}{-2} = -1$

$$AB: y = -x - 1 \rightarrow y + x + 1 = 0$$

معادله خط عبوری از A و C $A(0, -1)$ $C(-1, a) \rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a+1}{-1}$

$$AC: y = (-a-1)x - 1$$

$$AC: y + (a+1)x + 1 = 0$$

$$MH' = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$MH = \frac{2}{\sqrt{1+(a+1)^2}} \quad \boxed{MH = MH'} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{2}{\sqrt{(a+1)^2+1}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{2}{1} = \frac{4}{(a+1)^2+1}$$

$$2 = (a+1)^2 + 1$$

به ازاء $a = 0$ سه نقطه بر یک خط قرار می‌گیرند.

$$(a+1)^2 = 1 \rightarrow \begin{aligned} a+1 &= 1 \rightarrow a = 0 \\ a+1 &= -1 \rightarrow a = -2 \end{aligned}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

ابتدا تکلیف نقطه C را مشخص می‌کنیم:

$$f^{-1}(x-1) = 0 \xrightarrow{\text{وارون}} f(0) = x-1 \xrightarrow{f(x)=a^x} 1 = x-1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow C(2, 0)$$

از طرفی می‌دانیم تابع نمایی $y = a^x$ در نقطه $(0, 1)$ محور y ها را قطع می‌کند، پس: $A(0, 1)$

همچنین نقطه $B(x, a^x)$ نیز روی $f(x) = a^x$ قرار دارد.

حالا دقت کنید:

چهار ضلعی ABCD مربع است پس: $\left. \begin{array}{l} (1) \text{ خطوط } AB \text{ و } AC \text{ برهم عمودند و شیب‌هایشان عکس و قرینه هم است.} \\ (2) \text{ اندازه } AB \text{ و } AC \text{ باهم برابر است.} \end{array} \right\}$

$$1) m_{AC} = \frac{0-1}{2-0} = \frac{-1}{2} \Rightarrow m_{AB} = 2 \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 2$$

در نتیجه:

$$\frac{a^x - 1}{x - 0} = 2 \rightarrow a^x - 1 = 2x \quad *$$

$$2) AB = \sqrt{(a^x - 1)^2 + x^2} \xrightarrow{*} \sqrt{(2x)^2 + x^2} = \sqrt{5} \Rightarrow 5x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$AC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

با توجه به نمودار تابع، $x = 1$ قابل قبول است.

$$a^1 - 1 = 2 \rightarrow a = 3$$

با جایگذاری $x = 1$ در $*$ داریم:

پس مختصات نقطه B برابر است با:

$$B(x, a^x) \xrightarrow[\substack{x=1 \\ a=3}]{\quad} B(1, 3) \Rightarrow x_B + y_B = 1 + 3 = 4$$

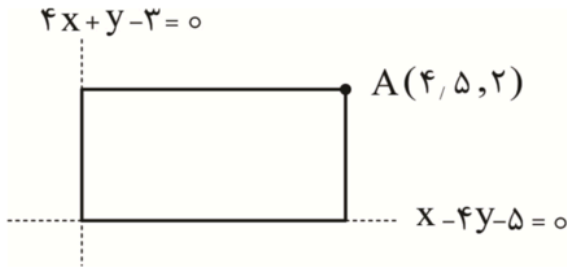
(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

با جایگذاری دو مقدار دلخواه به جای m و به دست آوردن معادله دو تا از این خطوط و سپس حل آن‌ها در یک دستگاه، مختصات نقطه ثابتی که این خطوط از آن‌ها می‌گذرند (در اینجا همان رأس مستطیل) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} m = \frac{-1}{2} \rightarrow \frac{7}{2}y = 7 \Rightarrow y = 2 \\ m = \frac{-1}{9} \rightarrow \frac{14}{9}x = 7 \Rightarrow x = \frac{9}{2} = 4.5 \end{cases} \rightarrow A(4.5, 2)$$

دقت کنید که مختصات این نقطه، در هیچ کدام از معادلات اضلاع داده شده، صدق نمی‌کند.

پس داریم:



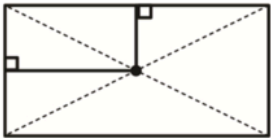
واضح است که فاصله نقطه A تا هریک از این خطوط، برابر با طول و عرض مستطیل است:

$$\text{فاصله نقطه } A(4.5, 2) \text{ از خط } 4x + y - 3 = 0: \frac{|4(4.5) + 2 - 3|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

$$\text{فاصله نقطه } A(4.5, 2) \text{ از خط } x - 4y - 5 = 0: \frac{|4.5 - 4(2) - 5|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{8.5}{\sqrt{17}} = \frac{17}{2\sqrt{17}} = \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

در پایان، فاصله محل تلاقی قطرهای مستطیل تا اضلاع را می‌خواهیم که برابر با نصف طول و نصف عرض مستطیل است که در اینجا به

ترتیب برابر با $\frac{1}{2}(\sqrt{17})$ و $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sqrt{17})$ است و چون مقدار کمتر مدنظر است، $\frac{\sqrt{17}}{4}$ قابل قبول است که $\frac{1}{4}$ برابر $\sqrt{17}$ می‌باشد.



(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

گزینه ۲ درست است.

یک بار $m = ۱$ و یک بار $m = -۴$ را به معادله می‌دهیم تا مختصات نقطه ثابت را به دست آوریم در (ریشه‌های ضریب‌های x و y را می‌دهیم).

$$\left. \begin{array}{l} m = 1 \rightarrow 5y = 4 \rightarrow y = \frac{4}{5} \\ m = -4 \rightarrow -5x = 4 \rightarrow x = \frac{-4}{5} \end{array} \right\} A, \left(\frac{-4}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$\frac{\left| 3 \times \frac{-4}{5} + 3 \times \frac{4}{5} + 7 \right|}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{7}{3\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{6}$$

حال فاصله نقطه A را از خط L به دست می‌آوریم:

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)